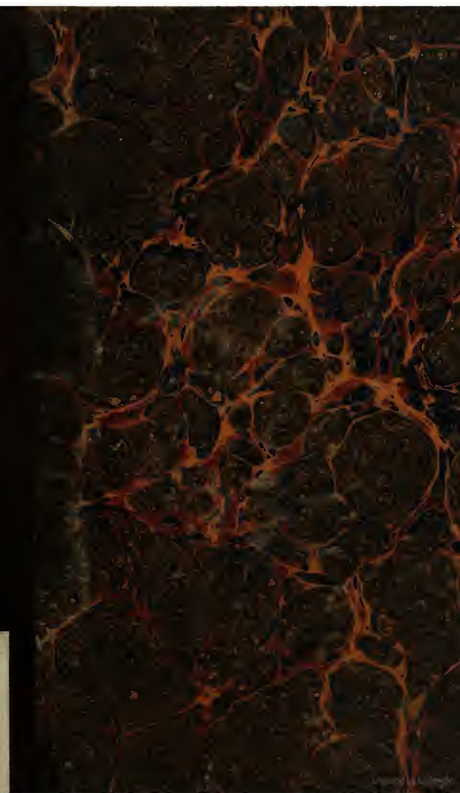


L' ARITMETICA

LA GEOMETRIA PIANA

E

LA GEOMETRIA SOLIDA

IN SESSANTA LEZIONI

PER

Angelo Santoro

CAPITANO COMANDANTE DI ARTIGLIERIA.

TERZA EDIZIONE



NAPOLI,
TIPOGRAFIA DELL' AQUILA DI V. PUZZIELLO.
Nel Chiostro S. Tommaso d' Aquino.
1844.

Haec qui spernit, id est, has semitas sapientiae, ei denuncio non recte philosophandum. — **Borz.**



INTRODUZIONE



Lo studio della matematica interessa l'uomo quanto la propria esistenza. La Pittura, l'Ottica, l'Astronomia, la Geografia, la Meccanica, etc. non sono che applicazioni delle matematiche cognizioni; per lo che ogni uomo, qualunque siasi la classe, o lo stato cui si appartiene, sentir deve il bisogno di studiare questa madre di tutte le umane scienze.

Ciò non ostante la matematica ebbe i suoi detrattori; taluni la tennero come erronea scienza sol perchè in geometria si contano dei paradossi: in fatti non si può menare che una sola tangente ad un circolo per lo stesso punto di contatto, mentre pel punto medesimo si possono far passare infinite circonferenze: l' asintoto nella iperbole non tocca mai la curva, benchè queste due linee si protragghino all' infinito, e benchè vadino sempre fra loro avvicinandosi, ed altri simili. Ma ciò lungi

che ne scapiti la certezza di questa scienza, mostra in vece la sua subblimità, da poichè per tali paradossi sol si debbe conchiudere che vi sono in matematica talune verità, che ben si dimostrano, ma che non si concepiscono; vale a dire per questo studio l'umano spirito vien condotto oltre i suoi confini. Ed in quanto a ciò pensiamo col divino Platone esser la matematica la scienza prediletta del Creatore: *Dio*, bellamente disse quel sommo filosofo, *governa il mondo geometrizando.*

Ma per quanto certa, e dimostrata cosa sia la necessità dello studio di questa scienza, non così è generalmente riconosciuto il metodo col quale apprenderla conviene. È antica controversia nelle Scuole se debbasi in istudiarla attenersi al metodo *sintetico*, ovvero all' *analitico*, il che produsse diversità di opinioni fra gli studiosi: in fatti evvi di coloro che si determinano ad insegnarla col metodo degli antichi (1), ovvero col sintetico,

(1) Benchè gli antichi greci di tante scoverte arricchirono la geometria, e tanto travagliarono intorno alla conoscenza delle curve, pure non è da persuadersi che essi usassero mai la nostra analisi algebrica. In fatti percorrendosi attentamente gli scritti dei matematici greci, e sopra tutto quelli di Pappo che ha fatto la collezione delle scoverte di que' sommi geometri, non trovasi vestigio alcuno dell' analisi nostra. Ma agli antichi però non era

perchè attissimo lo dicono ad avvezzare la mente al rigore delle dimostrazioni; come di altri, che proclivi a studiarla colla moderna analisi, tengono questo metodo pregevoliesimo perchè mena lo spirito umano alle invenzioni, ed alle scoverte. Noi lasciandone la decisione a superiori ingegni, noteremo solamente, che l' analisi, e la sintesi, come facoltà del nostro intelletto, sono, per così dire, i mezzi di cui lo spirito si avvale per progredire nelle conoscenze; che l' uomo facendo giocare or più l' una, ed or più l' altra non fa, che segnare diverse strade per le quali vuol progredire, ma sempre i medesimi risultamenti egli ottiene; ond' è che nel XVIII° secolo, in cui l' analisi fu generalmente prediletta, l' umano sapere giunse a tanta altezza da creare la chimica sulle fole degli alchimisti, e smentire tanti errori, e pregiudizî, che teneano soggiogati la maggior

ignota l' analisî; è questa una facoltà dell' umano spirito, comune a tutti gli uomini ond' essi senza dubbio la usarono come mezzo intellettuale per giungere allo scoprimento delle ascose verità, ma poi la tacquero nella esposizione de' loro teoremi, che sempre traducevano in linguaggio sintetico; e ciò ha fatto credere che il sintetico era il solo metodo dagli antichi conosciuto, ad onta che l' analisi, come la sintesî sono antichi quanto l' umano ragionamento.

parte degli uomini : come nel secolo in cui viviamo, comunque tendesi a ricomporre tutto ciò che venne da' nostri predecessori analizzato, ed invocasi la sintesi come necessario mezzo per istabilire un miglior pensiero filosofico , è pur desso un secolo di stupore, e di slanci , un secolo , che può dirsi il *maggiore* per l' umano progresso.

Se non che la sintesi attissima all' esposizione rigorosa de' principî , e delle verità, è sempre la conseguenza dell' analisi ; overo la prima comincia , ove termina la seconda ; e per tutto ciò noi stimiamo utile allo insegnamento de' giovani il dare loro con metodo sintetico i principî che servir debbono come di fondamento allo studio, cui si addicono, per poi abbandonarli nello spazioso campo dell' analisi , per lo studio della parte trascendentale della scienza.

Di ciò persuasi dettiamo le presenti lezioni con metodo sintetico , con che formatosi lo spirito de' nostri studiosi al rigoroso matematico ragionamento , potranno nelle successive superiori discipline usar proficuamente l' analisi , per giungere alla divinazione , ed alla scoverta di ascose verità.

E quì facciamo precedere il piano della no-

stra opera, acciò i lettori conascono il campo, che percorrer debbono, e fin dal principio adocchino la meta, cui devono pervenire.

Lo studio di questo libro è ripartito in 60 lezioni, ogni una capace di essere appresa nel corso di un sol giorno.

Tratteremo in primo luogo dell'Aritmetica, e racchiuderemo in essa l'algoritmo, le frazioni ordinarie, le decimili: toccheremo il modo di valutare i rotti, e calcoleremo i numeri complessi: chiuderà questa prima parte dell'opera il calcolo delle ragioni e proporzioni.

Succederà all'Aritmetica la Geometria, e siccome si è questa la scienza della estensione, perciò prenderà in oggetto la *lunghezza*, la *larghezza*, e la *profondità*; e parleremo quindi delle *linee*, delle *superficie*, e de' *solidi*. In quanto alle *linee*, noi esporremo le loro varie proprietà, noteremo gli angoli, che esse formano nella scambievole loro inclinazione, ed insegneremo il modo di misurarli; esporremo la teorica de' triangoli, dinoteremo la loro uguaglianza, e similitudine, parleremo delle linee proporzionali. Passeremo poi alle superficie, e ne determineremo le misure, non che i loro rapporti; esamineremo le proprietà de' piani, degli angoli solidi ec.

Infine tratteremo dei solidi , e stabiliremo il rapporto fra le loro superficie ; calcoleremo le loro solidità , e fermeremo il rapporto fra queste.

Chiuderà l' opera un' appendice contenente il trattato de' logaritmi , le misure delle botti, ed un sunto del nostro nuovo sistema metrico.

È stato nostro principale scopo nello scrivere queste istituzioni, di presentare a' giovani le materie sotto il più facile aspetto, e con chiarezza , da non fare ad essi sentire il bisogno della voce del maestro. Possa il fatto pienamente corrispondere al nostro desiderio.



NOZIONI GENERALI

LEZIONE I.

La matematica è la scienza della grandezza: dicesi *grandezza* o *quantità*, tutto ciò, che è suscettibile di aumento, o di diminuzione. E perchè gli oggetti tutti che cadono sotto i nostri sensi si presentano or come una collezione di più cose simili, ed ora come un sol tutto, senza distinzione di parti, è perciò che le quantità si distinguono in *discrete* ed in *continue*, secondo che esse appartengono alla prima, o alla seconda delle indicate classi. Or la quantità discreta essendo, come si è detto la collezione de' più cose simili, dessa ci dà l' idea del *numero*, il quale altro non è se non l' aggregato di più cose simili, ed uguali, ciascuna delle quali dicesi *unità*. La scienza che dà le regole di calcolare le quantità discrete è l' *Aritmetica*.

D' altra parte le quantità continue che si mostrano in un sol tutto indiviso, come p. e. la lunghezza di una linea, che si mena fra due punti, l' inviluppo, che rappresenta la figura di un corpo, e cose simili, desse formano l' oggetto della *Geometria*.

Le scienze matematiche si dividono in *pure*, e *miste*: si dicono *pure* quelle, che prendono in oggetto le quan-

tità per loro stesse, astrazion facendo dalle qualità fisiche, di cui sono rivestite; quale appunto è l'Aritmetica, e la Geometria. Si dicono miste quelle altre, che si occupano delle grandezze, considerate in quanto a' proprî attributi, come p. e. l' *Ottica*, che tratta della luce, la *Meccanica* ch' esamina il moto de' corpi etc.

Le scienze matematiche essendo le sole esattissime, vengono trattate, ed esposte con ordine rigoroso, e con linguaggio tecnico; perlocchè si rende necessario dare quì un'idea di alcuni vocaboli, e modi di esprimere, che sono proprii della scienza che trattiamo.

Dicesi *teorema* quella verità annunziata, che ha bisogno di essere dimostrata.

Dimostrazione è quel ragionamento, che serve di pruova di una proposizione.

Problema è quella proposizione, che indica una *operazione* da eseguirsi, quale poi eseguita, dev' essere dimostrata.

Lemma è una verità, che si premette, perchè servir possa di principio alle altre seguenti.

Corollario è una verità, che procede immediatamente da un' altra dimostrata.

Definizione è ciò che dà la spiegazione di una cosa, o di un vocabolo:

Assioma è quella verità, che s' intende senza il bisogno di dimostrazione.

I matematici, a motivo di compendiare il discorso, hanno adottati segni particolari, per esprimere alcune determinate parole, come hanno usato delle lettere, scelte a piacere nell'Alfabeto, per indicare le quantità, o le grandezze che si vogliono calcolare.

Così $+$ significa *più*: volendo alla quantità qualunque A aggiungere l' altra B, si scriverà $A + B$, e si dirà A più B.

— Significa *meno* : $A - B$ indica, che dalla quantità A si debba togliere l'altra B, e si dirà A meno B.

$=$ indica *uguale* : $A = B$ indicherà essere A uguale B.

$>$ vale *maggiore:* $A > B$ indicherà essere A maggiore di B.

$<$ *minore* : $A < B$ indicherà essere A minore di B.

Quando si vuol indicare la continenza di nna quantitità in un' altra della stessa specie, si sogliono frapporre verticalmente due punti fra le due lettere che tali quantità rappresentano; così se si vuole indicare che la quantità A contiene l'altra B, o da questa n' è contenuta un certo numero di volte, si scriverà $A : B$. Lo stesso significato si dà pure all'altra espressione $\frac{A}{B}$.

Ma se invece una quantità A si vorrà prendere tante volte quante n' esprime l' altra B, questa operazione si acconna con frapporre fra le due lettere un sol punto, od il segno $\times$. Così $A . B$, oppure $A \times B$ indica che la quantità espressa da A si debba prendere tanto volte, quante n' esprime B.

ARITMETICA

LEZIONE II.

L' Aritmetica avendo, come si è detto, in oggetto il calcolo delle quantità discrete, essa è la scienza de' *numeri:* Nella precedente lezione abbiamo data l' idea del *numero*, che in più chiaro senso, non è che l' aggregato di più unità: or l' unità nella numerazione prendesi per termine di paragone, e si ritiene come indivisibile; ciò non ostante dessa viene anche delle volte considerata come divisibile in altre unità minori, il che dà luogo a calcoli particolari, come quello delle *frazioni*, e de' numeri *complessi*, che tratteremo in prosieguo.

La numerazione si serve di alcune cifre per esprimere i primi nove numeri; dalla combinazione di queste poi si fanno derivare tutt' i numeri possibili. Tali cifre sono

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero	uno	due	tre	quattro	cinque	sei	sette	otto	nove

Il modo di enunciare tutti gli altri numeri dopo il *nove* appartenendo alle prime nozioni che si danno a' fanciulli, noi ci asteniamo di esporlo, e diamo quì solamente le regole di saper scrivere e parlare ogni qual siasi numerica espressione.

Zero da sè solo non esprime cosa alcuna, ma serve

ad accrescere dieci volte il valore delle cifre ; che gli si scrivono a sinistra : così il numero 3 destinato ad esprimere tre unità di qualsiasi cosa , se vien scritto alla sinistra di 0 ; darà 30 , e questo numero valerà trenta delle stesse unità.

Inoltre il 2 da sè non vale , che due unità , ma messo alla sua destra p. e. il 3 , si avrà 23 , che dinoterà ventitrè , ovvero due decine , e tre unità : il 2 adunque , nell'avanzare di posizione verso la sinistra , ha ricevuto un valore decuplo di quello , che dinotava da sè solo. Ed in generale , per effetto della cennata convenzione , poichè una cifra acquista valori di dieci in dieci volte maggiori , a misura che la medesima si avanza dalla destra verso la sinistra , è da ritenersi il seguente generale principio ; *in una espressione numerica di più cifre , la prima , a cominciar dalla destra , indica unità semplici ; la seconda decine di unità ; la terza decine di decine di unità , dette centinaja ; la quarta decine di centinaja dette migliaja ; la quinta decine di migliaja ; la sesta decine di decine di migliaja , ossiano centinaja di migliaja , la settima decine di centinaja di migliaja , dette milioni.* etc. È questo il fondamento della nostra numerazione parlata.

Ciò posto, abbiasi l'espressione numerica 4657689, ossia

4	6	5	7	6	8	9
milioni	centinaja di migliaja	decine di migliaja	migliaja	centinaja	decine	unità

la medesima , seguendo le norme sopraccennate , si pronunzierà *quattro milioni seicento cinquantasettemila seicento ottanta nove.*

ADDIZIONE

Definizione. L'addizione dei numeri è quella operazione, mercè la quale, si perviene alla espressione conveniente al complesso di molti numeri dati della stessa specie.

PROBLEMA 1°.

Dati più numeri, come 73520, 702, e 897, sommarli insieme.

Operazione. Si scrivano i dati numeri l'un sotto l'altro, in modo che le cifre delle unità corrispondano tutte nella medesima colonna verticale; così quelle delle decine, quelle delle centinaja, ec: si avrà in tal modo

	73520
	702
	897
Somma	75119

Si tiri, come vedesi, una linea orizzontale al di sotto dei dati numeri, messi in colonna, e si cominci dal sommare insieme le cifre delle unità, vale a dire il 2 ed il 7, che fanno 9 unità; quindi si scrivi il 9 in corrispondenza, ed al di sotto della detta linea; si sommino poi le cifre delle decine, vale a dire il 2, ed il 9, e si avranno 11 decine, vale a dire un centinajo, ed una decina; si noti sotto la linea 1 decina, a sinistra del 9 unità, e si ritenghi 1 centinajo, per aggiungerlo ai numeri della seguente colonna, che appartiene alle centinaja. Si sommino in seguito le cifre 5, 7, 8, che appartengono alle centinaja, e si avranno 20 centinaja, alle qua-

li aggiunto 1 centinajo, riportato dall' antecedente colonna, si avranno 21 centinaja, vale a dire due decine di centinaja, ovvero due migliaja, ed un centinajo; per ciò, sotto la linea, alla sinistra dell' 1, esprimente le decine, si scrivi l' 1 esprimente centinaja, e si riportino le 2 migliaja, per aggiungerle alle cifre della seguente colonna, che è quella delle migliaja. Si sommino quindi le 3 migliaja colle 2 migliaja, riportate dalla colonna delle centinaja, e si otterranno 5 migliaja, che si noteranno sotto la linea, alla sinistra dell' 1 centinajo. Infine si noterà il 7, ch' è il solo esprimente le decine di migliaja, alla sinistra del 5, e la somma ricavata dai tre dati numeri, sarà.

75119. *settantacinquemila cento diecinove.*

Dimostrazione. Colle operazioni fatte, essendosi presa la somma di tutte le unità, di tutte le decine, di tutte le centinaja ec. che si contengono ne' dati tre numeri, si è ottenuta interamente la somma di essi numeri, che è quanto si voleva fare.

Per assicurarci poi della esattezza del risultato ottenuto, basterà ripetere le parziali somme sulle medesime colonne verticali, ma incominciando per cifre da sotto in sopra, anzicchè da sopra in sotto, come si è fatto. Se con ciò si otterrà lo stesso numero 75119, saremo sicuri che niun errore si è commesso.

La sottrazione , come l' addizione , si esegue fra numeri della medesima specie.

Quando si dice sottrarre il numero 3 dal 5 , altro non si vuole, che la differenza 2, ch' esiste fra essi numeri. È chiaro intanto che, *se la differenza 2 si aggiunge al numero minore 3 , si otterrà il numero maggiore 5*, come è chiaro altresì che *se si aggiunge , tanto al 5 che al 3 , un numero qualunque p. e. 10 , si avranno i numeri 15 , e 13 , fra quali vi esiste la medesima differenza 2 , che eravi tra i primi numeri dati.*

PROBLEMA 3°.

Dati due numeri disuguali della medesima specie, prenderne la differenza.

Operazione. Siano i numeri disuguali 58001 , e 3502 , che si rapportano alla medesima specie. Si scrivano l'uno sotto l' altro , e propriamente il minore sotto il maggiore , in modo , che corrispondano nella medesima colonna verticale le unità del primo con quelle del secondo , le decine colle decine , ec. Si avrà.

	58001
	3502
differenza	54499

Ciò fatto , si cominci dal sottrarre dalla cifra 1 , che esprime le unità del numero superiore , la corrispondente 2 , che esprime le unità del numero inferiore ; ciò non potendosi eseguire , per essere il 2 maggiore di 1 , si aumenti 1 di 10 unità (1) , ed avrassi 11 , da cui

(1) L' aumento , che si dà a' numeri , per potere eseguire fra essi la sottrazione , è regolato per tante delle unità , che rappresentano i

sottraggasi il 2, e si segni in corrispondenza la differenza 9. Or, pel principio pocanzi stabilito, conviene aumentare di 10 unità benanche il sottraendo, perchè la differenza rimanga la medesima; perciò si aumenti di 10 unità, o che val lo stesso, di 1 decina la cifra 0, che appartiene alle decine del sottraendo, e questa dovrebbesi sottrarre dal 0 superiore corrispondente alle decine del numero maggiore, il che non potendosi eseguire, si aumenta il zero di 10 decine, e dal 10 si sottragga il numero 1, e si noti in corrispondenza la differenza 9. Or, pel ragionamento precedentemente fatto, si deve anche di 10 decine o di un cantajo aumentare il sottraendo, e perciò si aumenti di 1 centinajo il 5, ch' esprime centinaja, e quindi devesi 6 sottrarre dal 0 superiore, ciocchè non potendo aver luogo, s' intendi il 0 aumentato di 10 centinaja, e da 10 sottratto il 6 si avrà la differenza 4, che si scrive nel luogo corrispondente; data quindi al sottraendo l' aumento medesimo, vale a dire intentendosi il 3 aumentato di 1 migliajo, si avrà 4, che sottratto dalla cifra superiore corrispondente 8, darà la differenza 4, che si nota al suo posto. Infine, non essendovi alcun numero da sottrarre dal 5, che indica le decine di migliaja, esso si noterà tal quale al di sotto della linea: il numero 54499 sarà la differenza fra i dati numeri.

Dimostrazione. Essendosi, colle operazioni precedentemente fatte, sottratte le unità dalle unità, le decine dalle decine, le centinaja dalle centinaja, ec. componenti rispettivamente i numeri proposti, la totale differenza ottenuta è quella che appartiene a' numeri dati.

numeri medesimi, quante ne compongono una unità della classe, che gli precede a sinistra. Così ad 1, che esprime unità semplici, si è dato l' aumento di 10 delle stesse unità semplici, perchè 10 di tali unità formano una decina, che è l' unità della classe, che precede a sinistra.

LEZIONE III.

MOLTIPLICA

Definizione. Moltiplicare un numero per un altro è lo stesso che prendere il primo di essi, che chiamasi *moltiplicando*, tante volte, quante unità si contengono nel secondo, che dicesi *moltiplicatore;* il numero che si ottiene chiamasi *prodotto*.

Per esempio, volendosi moltiplicare 5 per 3, devesi prendere tre volte il moltiplicando 5, perchè tre unità si contengono nel moltiplicatore 3, con ciò si avrà il prodotto 15.

Per agevolare i giovani nella operazione di prendere una cifra tante volte, quante unità si contengono in un altra data, si fa uso della seguente tavola, attribuita a Pittagora, e che si adopera nel modo seguente.

Si noti il moltiplicando, che si rinverrà nella colonna orizzontale superiore, ed il moltiplicatore, che si troverà in quella prima verticale a sinistra; nel punto, ove le due colonne, che a tali numeri appartengono, concorrono, si troverà il numero, indicante il prodotto cercato. Così, volendo conoscere il prodotto di 7 per 5, esso si rinverrà essere 35, punto ove concorrono le due colonne del 7, preso su quella verticale, e del 5, preso sulla orizzontale, come si è già detto.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Conoscendosi tutti i prodotti che somministrano i primi dieci numeri combinati tra loro, si può agevolmente procedere alla soluzione del seguente

PROBLEMA 3°.

Moltiplicare un numero qualunque per un' altro di una sola cifra.

Operazione. Si pone il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando ; si tira una linea al di sotto di questo numero per separarlo dal prodotto : si moltiplicano successivamente, a cominciare dalla destra, le unità di ciascun' ordine del moltiplicando pel moltiplicatore, ed il

prodotto si scrive tutto intero al di sotto della linea, se non conterrà che sole unità, ma se in esso vi saranno delle decine, queste si preleveranno, per unirle al prodotto seguente: in tal maniera si continua l'operazione sino all'ultima cifra a sinistra del moltiplicando, il di cui prodotto si scrive tal quale, senza prelevarne le decine.

Sia da moltiplicarsi 526 per 7; si scrivono così.

526	*moltiplicando*
7	*moltiplicatore*
3682	*prodotto*

Il prodotto delle 6 unità del moltiplicando per il moltiplicatore 7 è 42, numero che contiene 4 decine, e 2 unità, per lo che si scrivono le 2 unità sotto la linea a destra, e si ritengono le 4 decine per unirle a quelle che si otterranno nella seguente moltiplica delle 2 decine del moltiplicando pel moltiplicatore 7. Or il prodotto delle 2 decine del moltiplicando pel moltiplicatore 7 è 14, cui unendosi le 4 decine riportate dalla precedente moltiplica, si ha 18 decine; di questo numero si scrivono le sole 8 unità di decine, e si riporta alla seguente moltiplica la decina di decina, ovvero il centinajo.

Il prodotto delle 5 centinaja del moltiplicando pel moltiplicatore 7 è 35 centinaja, cui unito il centinajo riportato precedentemente si ha 36, che si nota tal quale come termine della operazione.

Dimostrazione. Colle operazioni fatte essendosi moltiplicate per 7 le unità, le decine, e le centinaja componenti il moltiplicando, si è in tal modo moltiplicato per 7 l'intiero moltiplicando, ch'è quel che si desiderava fare.

Intanto pria di passare alla soluzione del problema di moltiplicare un numero qualunque per un'altro di più

cifre, è d'uopo notarsi, che se il moltiplicatore fosse un numero terminato da zero, come 70, il prodotto del dato numero 526 per 7 dovrebbe essere dieci volte maggiore dell'ottenuto, perchè 70 è dieci volte maggiore di 7; e per la convenzione stabilita nella seconda lezione il prodotto corrispondente al 526 moltiplicato per 70, sarà 36820, vale a dire che *per moltiplicare un numero qualunque per un'altro che termina con zero, basterà moltiplicare il dato numero per la cifra significativa del moltiplicatore, ed al prodotto aggiungervi un zero.*

PROBLEMA 4°.

Dati due numeri di più cifre, moltiplicar l'uno per l'altro.

Operazione. Si scrive il moltiplicatore sotto il moltiplicando, nel modo stesso, che si è praticato per l'addizione, e per la sottrazione: indi ciascuna cifra del moltiplicando, a cominciare dalla destra si prendo tante volte, per quante unità si trovano nella prima cifra a destra del moltiplicatore, il prodotto si nota sotto la linea, seguendo le norme date nel problema precedente pel riporto delle decine alle rispettive classi. Indi si moltiplica ciascuna cifra dello stesso moltiplicando per la seconda cifra, a cominciar dalla destra del moltiplicatore, e si pratica come si è detto innanzi, riportando, cioè, le decine di ciascun prodotto alla moltiplica seguente; con attenzione però di notare questi secondi prodotti in seconda linea orizzontale, incominciando in corrispondenza della seconda cifra del moltiplicatore, e così operando, per tutte le rimanti cifre di esso, si otterranno tante linee di prodotti, quante sono le cifre componenti il moltiplicatore: la somma di tutti questi prodotti sarà il prodotto de' dati numeri. Un esempio chiarirà meglio il già detto.

Sia da moltiplicarsi il numero 3052 per 153.
Si scrivino come siegue.

	3052
	153
	9156
	15260
	3052
Prodotto	466956.

Ove si vede, che preso tre volte il 2 dà 6, e siccome in questo prodotto non si contengono decine, si nota il 6 tal quale sotto la linea; tre volte il 5 dà 15, prelevesi 1 decina, che in questo prodotto si contiene, e si nota il 5 a sinistra del 6: tre volte il 0 dà 0, si nota quindi 1 decina riportata dal precedente prodotto a sinistra del 5: tre volte il 3 dà 9, che si nota tal quale a sinistra dell' 1.

Similmente si procede con moltiplicare il moltiplicando pel 5, seconda cifra del moltiplicatore, a contar dalla destra, e s' osserva, che cinque volte il 2, dà 10, vale a dire una decina, quale, dovendo essere riportata interamente nel prodotto seguente, rimane a segnarsi 0 sotto il 5, in seconda linea orizzontale. Si prosegue con moltiplicare ciascuna delle rimanenti cifre del moltiplicando per 5, come si è fatto pel 3, e si notano i varj prodotti. Infine facciasi altrettanto coll' ultima cifra 1 del moltiplicatore, incominciando a scrivere i prodotti in terza linea, ed in corrispondenza del 1, e si sommino i tre prodotti; avrassi così il numero 466956, che è il prodotto di 3052 per 153.

Dimostrazione. Seguendo l'andamento tenuto nelle precedenti operazioni, si vede che il moltiplicando è stato moltiplicato per le unità, per le decine, ec., del moltiplicatore, ossia per l'intiero moltiplicatore, e per con-

seguenza il prodotto ottenuto è quello, che si chiedeva.

Si sono poi notati i diversi prodotti orizzontali, avanzando di una cifra a sinistra, per la ragione, che quando si è moltiplicato il 3052 per 5 decine, si è inteso di moltiplicarlo per 50 unità, e per ciò che si è detto di sopra avrebbesi dovuto segnare un zero alla destra del prodotto 15260, il che non producendo alcuna alterazione al risultato, se n'è trascurata la segnatura, lasciandone il luogo dovuto. Ciò vale per la posposizione fatta delle altre linee de' prodotti parziali ottenuti.

Avvertimento. Si noti intanto, che per le cose dette si può l'operazione della moltiplica abbreviare di molto, quando si dovesse moltiplicare un numero qualunque per 1, seguito da uno, o più zeri, come 100; basterà in questo caso scrivere alla destra del moltiplicando tanti zeri, quanti ne contiene il moltiplicatore. Così volendo moltiplicare 25 per 100, il prodotto sarà 2500; il che è chiaro, dal perchè il moltiplicare 25 per 100, vale lo stesso che prendere cento volte, o rendere cento volte più grande il 25; or, per ciò che si è detto nella seconda lezione, un numero diventa 10 volte maggiore di sè coll'aggiungervi a destra un zero, e quindi cento volte maggiore, se se ne aggiungono due; dunque il 25 seguito da due zeri, è divenuto cento volte maggiore di sè.

Per effetto dello stesso raziocinio ne viene, che, se il 25 si avesse dovuto moltiplicare per un numero qualunque 3, seguito da zeri, si avrebbe dovuto pria moltiplicare il 25 per 3, ed alla destra del prodotto aggiungervi tanti zeri, quanti ne contiene il moltiplicatore; in tal modo, moltiplicando 25 per 300, si ha 7500. La verità di questa regola coincide con ciò che si è notato nel problama 3°; e si chiarisce dall'osservare che il 25 moltiplicato per 300, dev'essere 3 volte maggiore del 25 moltiplicato per 100, ossia dev'essere uguale

a 2500 + 2500 + 2500 , che in una somma dà 7500.

I giovani si eserciteranno operando su i seguenti esempî.

	25729.		39743.
	311.		200.
Podotto	8001719	Prodotto	7948600

LEZIONE IV.

DIVISIONE

Definizione. La divisione è quella operazione, mercè la quale si trova quante volte un numero qualunque, p. e. 15, che chiamasi *dividendo*, contiene un altro di lui minore, p. e. 5, che chiamasi *divisore*: il numero 3, ch' esprime una tal continenza, vien detto *quoziente*.

Da ciò deriva, che il dividendo contiene tante volte il divisore, quante unità si trovano nel quoziente. E quindi se il divisore si prenderà tante volte, per quante unità si trovano nel quoziente, si otterrà il dividendo. Ciò però suppone il caso di una divisione esatta, com' è stata quella del 15, che contiene esattamente tre volte il 5; ma se il dividendo non contiene esattamente il divisore, la divisione darà un residuo; in questo caso, per ottenere il dividendo, si dovrà aggiungere il residuo al prodotto del divisore pel quoziente. Così, volendo dividere 24 per 5, si osserva che il 5 è contenuto 4 volte dal 24, e rimane un residuo 4; quindi per riottenere il dividendo 24 fa d' uopo aggiungere il residuo 4 al prodotto 20, che deriva dal divisore 5 moltiplicato pel quoziente 4.

PROBLEMA 5°.

Dividere un numero di più cifre per un altro, di luì minore.

Operazione. Scrivesi il dividendo alla sinistra del divisore: si prende nel dividendo, a cominciare dalla sinistra un numero di cifre, che sia capace di contenere

il divisore, il numero ch' esprimerà una tal continenza si scrive sotto il divisore, luogo destinato pel quoziente; indi si moltiplica il divisore per questo quoziente, e 'l prodotto si scrive sotto le cifre del dividendo, che si sono divise pel divisore, e fattane la sottrazione, si nota in corrispondenza il residuo. Indi a fianco al residuo si abbassa la seguente cifra del dividendo, e si divide il residuo unitamente alla cifra abbassata al suo fianco, pel divisore: se tale divisione potrà eseguirsi, si noterà il quoziente a destra dell' altro precedentemente ottenuto, se la divisione è inseguibile si noterà per quoziente zero, e si abbasserà l' altra seguente cifra del dividendo: si proseguirà l' operazione come innanzi si è fatto, finchè saranno esaurite tutte le cifre del dividendo. La collezione di tutti tali quozienti comporrà un numero che sarà il quoziente domandato.

Chiariremo tutto ciò con degli esempii.

Sia proposto di dividere 824 per 4: scrivansi detti numeri come siegue

$$\begin{array}{r|l} 824 & 4 \\ \hline 8 & 206 \\ \hline 024 & \\ 24 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

Ove si vede, che si è presa nel dividendo la cifra 8, da cui si è cominciata la divisione, per essere la medesima capace di essere divisa per 4: si è ottenuto da tal divisione il quoziente 2, che si è notato sotto il divisore 4; e, fatta la moltiplica di 2 per 4, si è segnato il prodotto 8 sotto la prima cifra del dividendo: si è fatta quindi la sottrazione fra questi due numeri, dalla quale non si è ottenuto alcun residuo. Indi si è abbassata la cifra 2 accanto al zero, e questa, divisa pel divisore 4, non ha dato alcun quoziente, perchè la di-

visione di 2 per 4 è ineseguibile ; si è perciò segnato zero per quoziente affianco all'altro quoziente 2 : si è abbassata al fianco della cifra 2 l'altra cifra 4 del dividendo , e diviso il 24 pel 4 , si è avuto il quoziente 6, che moltiplicato per 4 ha dato il prodotto 24 , che si è scritto sotto il dividendo 24 , e , sottratto l'un dall'altro, non si è ottenuto alcun residuo. Quindi 206 è il quoziente esatto di 824 diviso per 4.

Sia inoltre proposto di dividersi il numero 1534 per 23. Scrivansi tali numeri , come i precedenti , cioè

1534	23
138	66
154	
138	
16	

Ove si vede , che si è incominciata la divisione dalle tre prime cifre 153 del dividendo , perchè esse sono capaci di contenere il divisore 23 un certo numero di volte : si è proseguita l'operazione, come nel precedente esempio , e si è ettenuto in ultimo il quoziente 66 , ed un residuo 16, il che mostra che il numero 1534 non è divisibile esattamente pel 23.

Dimostrazione. Colle operazioni sopra enunciate si è calcolato quante volte il divisore è contenuto nelle migliaja, nelle centinaja , ecc. del dividendo , ossia quante volte il divisore è contenuto in tutto il dividendo , che è quanto si domandava di fare.

Sarà una pruova di aver bene eseguita la divisione se, moltiplicando il divisore pel quoziente , ed al prodotto aggiunto il residuo , si otterrà il dividendo.

Avvertimenti. Si farà bene di notare volta per volta , con un puntino ogni cifra del dividendo , che si abbassa al fianco di ciascun residuo , acciò non si confondino le cifre abbassate con quelle , che restano ad abbassarsi.

Inoltre, se nell' eseguire una divisione avverrà che un residuo riesca uguale, o maggiore del divisore, sarà questo un segnale che il divisore è ancor contenuto una, o più volte, nel corrispondente parziale dividendo, al di più di quante ne marca il segnato quoziente, ed in questo caso, un tal quoziente dovrà aumentarsi di tante unità finchè il suo prodotto pel divisore, sottratto dal relativo dividendo, dia un residuo minore del divisore medesimo.

In fine si noti che nell' ultimo esempio di divisione la operazione non ha potuto effettuarsi esattamente. In fatti la divisione dei 1534 per 23 avendo dato il quoziente 66, e 'l residuo 16, mostra che il 1534 contiene 66 volte il 23, più il supero 16; quindi per ottenersi con esattezza il quoziente corrispondente alla cennata divisione, converrebbe dividere anche il resto 16 pel divisore 23, il che per eseguirsi convien considerare ciascuna delle unità che si contengono nel 16 suddivisa in altre unità minori; in tal modo la cifra 16 venendo presa tante volte, quante sono le parti in cui ciascuna delle sue unità si considera suddivisa, si trasformerà in un' altra cifra, maggiore di sè, e capace di essere divisa pel 23, si otterrà con ciò un quoziente, della stessa specie, o classe delle unità, in cui quelle del 16 sono state suddivise. Dallo sviluppo di questa idea prende origine il calcolo delle frazioni, pel quale noi ci rimettiamo alla seguente lezione, ove tale teorica verrà convenientemente trattata; e noteremo quì solamente, che non potendosi, come si è detto, eseguire la divisione del 16 pel 23, tale operazione l' accenneremo nel modo convenuto $\frac{16}{23}$, e questa cifra aggiunta al quoziente 66, darà l' espressione $66+\frac{16}{23}$, e sarà questo il quoziente esatto della divisione di 1534 per 23.

Ciò vale per ogni altra divisione, che conduce ad un residuo.

LEZIONE V.

CALCOLO DELLE FRAZIONI

Definizione. Dicesi *frazione* quella espressione numerica atta ad indicare una o più parti dell'unità.

Or perchè l'unità si può considerare divisa in un vario numero di parti, così è necessario che, per ben esprimere una frazione si adoperino due numeri; cioè uno, che indichi le parti, in cui si considera divisa l'unità, e che dicesi *denominatore*, l'altro che additi quante di esse parti si vogliono prendere nel calcolo, e che vien denominato *numeratore*. Se dunque si vorrà esprimere una frazione che sia due terze parti dell'unità, ossia due parti dell'unità, che ne sia stata divisa in tre, si scriverà $\frac{2}{3}$, ove il 2 è il numeratore, e il 3 il denominatore, separati fra loro da una linea orizzontale. È questo il modo di scrivere ogni qualunque frazione. Posto ciò, e quanto si è notato nell'ultimo paragrafo della precedente lezione, non è difficile il comprendere che *ogni frazione si può considerare come una divisione, in cui il numeratore è il dividendo, e 'l denominatore è il divisore*. Infatti se ci vien dato di calcolare i $\frac{2}{3}$ di un piede, sarà lo stesso, che prendere la terza parte di 2 piedi, da poichè, essendo il piede diviso in 12 pollici, i due terzi di 12 pollici formano 8 pollici, e volendo prendere in vece il terzo di due piedi si dovrà prendere il terzo di 24 pollici, che dà benanche 8 pollici.

Avvertimenti 1. Posta la descritta natura delle frazioni, è agevol cosa il notare, che *di due frazioni, che hanno lo stesso denominatore, è maggiore quella, che ha il più grande nume-*

ratore, e viceversa, *di due frazioni, che hanno lo stesso numeratore, è minore quella, che ha maggiore il denominatore.* In fatti è da sè evidente, essere $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$ e che $\frac{5}{8} < \frac{5}{7}$. Ed in generale *ogni frazione aumenta col crescere del suo numeratore, e minora col crescere del suo denominatore;* dapoichè nel primo caso si viene a prendere un maggior numero delle stesse parti dell'unità, e nel secondo l'unità, venendo divisa in un numero maggiore di parti, ciascuna parte n'è più piccola, e per ciò risulta minore l'aggregato di un medesimo numero di esse.

2. È pur da notarsi, *che una frazione qualunque non cambia di valore, se, tanto il numeratore, che il denominatore, si moltiplica, o si divide per uno stesso numero qualunque:* in effetti se nella frazione $\frac{1}{3}$ si moltiplica, tanto il numeratore, che il denominatore per 2, si avrà l'altra $\frac{2}{6}$; or colla prima frazione si prende una parte dell'unità divisa in tre, e colla seconda si prendono due parti della medesima unità divisa in sei; vale a dire ciascuna parte, in cui è stata divisa la prima frazione, è doppia di ciascuna di quelle, in cui è divisa la seconda, e perciò una delle prime equivalerà a due parti delle seconde; ed in conseguenza sta bene l'espressione

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Nel modo medesimo se la frazione $\frac{6}{9}$ si riduce all'altra $\frac{2}{3}$, con dividere, tanto il numeratore, che il denominatore per 3, ne risulterà, che prendendosi colla prima espressione 6 parti dell'unità divisa in 9, e colla

seconda 2 della medesima unità divisa in 3; ciascuna parte, in cui è stata divisa primieramente l' unità, è terza parte di ciascuna di quelle, in cui è stata divisa dapoi, perciò 6 delle prime uguaglieranno 2 delle seconde, ed in conseguenza sta bene, che

$$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

3. Ogni qualsiasi numero intero si potrà mettere sotto la forma di frazione, dandogli per denominatore l' unità; e ciò perchè l' unità, di sua natura, non moltiplica, e non divide: così volendo mettere l' intero 5 sotto forma di frazione, si farà $\frac{5}{1}$. Ma se poi ad un intero si vorrà dare la forma di una frazione, che abbia un dato denominatore; p. e. se si vuol ridurre il 5 alla forma di frazione, che abbia per denominatore 3, converrà moltiplicare il denominatore, ed il numeratore del rotto $\frac{5}{1}$ pel dato denominatore 3, si avrà $\frac{15}{3}$; e pel principio precedentemente stabilito, sarà sempre

$$5=\frac{5}{1}=\frac{15}{3}$$

4. In fine si osservi, che, per la definizione data in principio di questa lezione, essendo la frazione l' espressione di una, o più parti dell' unità, e $\frac{15}{3}$ avendo in vece per valore l' intero 5, a questa specie di frazione noi daremo il nome di *frazione apparente*. Di qui nasce il principio, che *ogni frazione, che ha il numeratore più piccolo del denominatore è minore dell' unità; ed è maggiore dell' unità, quella, che ha il numeratore maggiore del denominatore; e poi uguale all' unità quella frazione, che ha il numeratore uguale al denominatore. Così è*

$$\frac{3}{4}<1,\ \frac{4}{3}>1,\ \frac{3}{3}=1$$

LEZIONE VI.

PROBLEMA 6°.

Date più frazioni di diverso denominatore, come per esempio $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$, ridurle ed avere lo stesso denominatore.

Operazione. Moltiplichisi, tanto il numeratore, che il denominatore della prima frazione $\frac{2}{3}$ per 5, denominatore dell' altra, ed avrassi $\frac{10}{15}$; si moltiplichi poi, tanto il numeratore, che il denominatore dell' altra frazione $\frac{4}{5}$, per 3, denominatore della prima, e si avrà $\frac{12}{15}$; le due frazioni $\frac{10}{15}$, e $\frac{12}{15}$. saranno le due frazioni identiche alle prime in valore, e che hanno lo stesso denominatore.

Dimostrazione. Poichè in ciascuna delle frazioni date, si è moltiplicato il numeratore, ed il denominatore, per uno stesso numero, esse non hanno cambiato di valore, perciò le ottenute frazioni $\frac{10}{15}$ e $\frac{12}{15}$ avendo lo stesso denominatore, sono le domandate.

Avvertimento. Se in vece di due frazioni se ne avranno di più a ridurre allo stesso denominatore, come per esempio $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{15}$, pel problema precedente devesi moltiplicare il numeratore ed il denominatore di ciascuna per tutt' i denominatori delle rimanenti frazioni, ovvero pel prodotto de' rimanenti denominatori, il che dà $\frac{75}{225}$, $\frac{135}{225}$, $\frac{60}{225}$. Ma questa regola generale soffre una eccezione nel caso, in cui si osserva che il maggiore de' denominatori delle date frazioni è un multiplo

de' rimanenti, come si vede nelle assunte frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{15}$; ove il 15, maggiore de' denominatori dati è un multiplo di 3, e di 5. In tal caso basterà moltiplicare il numeratore, e denominatore delle rimanenti frazioni aventi i minori denominatori pel conveniente fattore del maggior denominatore; in fatti se nella frazione $\frac{1}{3}$ si moltiplica tanto il numeratore che il denominatore per 5, e nell'altra $\frac{3}{5}$ per 3, ambi fattori del maggior denominatore 15, si avrà per la prima frazione $\frac{5}{15}$, e per la seconda $\frac{9}{15}$, e le frazioni date $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, e $\frac{4}{15}$, si trasformeranno nelle altre $\frac{5}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{4}{15}$, aventi lo stesso denominatore, e ciò senza praticare le laboriose moltipliche, che prescrive la regola generale data.

Lo studioso poi si convincerà bene, che le frazioni $\frac{75}{225}$, $\frac{135}{225}$, $\frac{60}{225}$, ottenute mercè la regola generale, corrispondono in valore alle altre $\frac{5}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{4}{15}$, ora ottenute, se osserverà che le prime sono tutte divisibili nel numeratore, e denominatore per 15; il che fatto quelle si trasformano in queste frazioni ultime. E perchè nel calcolo spesso si ottengono frazioni composte di grandi cifre numeriche, in tal caso debbasi sempre tentare di praticare la cennata riduzione, dividendo cioè il numeratore, ed il denominatore pel maggior divisore, che ad essi è comune, quale maggior divisore si rinviene con regola, che andiamo ad esporre nella seguente lezione.

LEZIONE VII.

PROBLEMA 7°.

Trovare il massimo comune divisore fra due numeri dati.

Operazione. Dividasi il più grande pel più piccolo dei dati numeri; se la divisione non dà alcun residuo, il più piccolo numero sudetto sarà il massimo comune divisore cercato; ma se vi sarà residuo, si proseguirà l'operazione con dividere il più piccolo dei dati numeri pel residuo; se tal divisione risulta esatta, il residuo sarà il massimo comune divisore cercato, ma se vi sarà ancora una resta, bisognerà progredire, dividendo il primo residuo pel secondo, e così successivamente, il secondo residuo pel terzo, ec. finchè si giungerà ad una divisione senza residuo; in tal caso l' ultimo residuo, che ha diviso esattamenta il residuo precedente, sarà il massimo comune divisore dei dati numeri. Ma se l'ultimo residuo sarà 1, sarà questo un segnale indicante, che i dati numeri non hanno altro massimo comune divisore, che l'unità; questa specie di numeri diconsi *numeri primi fra loro.* Così 2, e 3 sono numeri primi fra loro.

Dimostrazione. Per meglio spiegare le nostre idee proponiamoci due numeri; per esempio, 429 e 182. Se 182 divide 429, è evidente che 182 è il divisor che si cerca; ma fatta la divisione, si trova il resto 65 ed il quoziente 2. Egli è chiaro che quel numero che divide 65 e 182, dovrà eziandio dividere 429, che è uguale a 2 volte 182 più 65; ed un tal numero non potrà essere maggiore di 65, altrimenti 65 sarebbe diviso da un numero maggiore di esso medesimo, lo che non può essere: adunque bisogna prima osservare se 65 non sia divisore di 182, perchè, se lo fosse, sarebbe 65 il divisor che si

cerca: ma 182 diviso per 65 dà per quoziente 2, e per resto 52. Noi possiamo applicare al resto 52 i medesimi ragionamenti, che abbiamo fatto sopra 65, per conchiudere che sarebbe 52 il divisor che si domanda, se 52 dividesse esattamente 65; lo che non è, perchè 65 diviso per 52 dà per quoziente 1, e per resto 13. Discorrendo sul resto 13 come su i resti 65 e 52, si vede che la nostra indagine si è ormai ridotta a trovare il più gran numero che divide 13 e 52, e prima bisogna vedere se non sia lo stesso 13. Di fatti diviso 52 per 13, il quoziente è 4 senza resto: adunque 13 è comune divisore di 429 e 182, è per quel che abbiam detto, è il massimo.

Ciò posto, sarà facile la soluzione del seguente

PROBLEMA 8°.

Ridurre una frazione alla sua minima espressione.

Operazione. Questo problema è solubile quando il numeratore, e 'l denominatore della frazione che si vuol ridurre, hanno un comune divisore; in questo caso dividasi, tanto il numeratore, che il denominatore della data frazione pel loro massimo comune divisore; la frazione che ne risulterà sarà la ridotta alla sua minima espressione. Così abbiasi a ridurre alla sua minima espressione la frazione $\frac{10}{15}$; basterà dividere, tanto il numeratore 10, che il denominatore 15, per 5, che è il loro massimo comune divisore, e si avrà l'altra $\frac{2}{3}$, che è la data, ridotta alla minima espressione.

Dimostrazione. Poichè dividendosi, tanto il numeratore, che il denominatore, per uno stesso numero, la fra-

zione non cambia di valore, perciò sarà la frazione data $\frac{10}{15}$ uguale all' altra $\frac{2}{3}$, ch'è la ridotta alla minima espressione.

Premesso quanto abbiamo finora detto intorno alle frazioni, passiamo ad operare su di esse le quattro principali regole di aritmetica.

LEZIONE VIII.

PROBLEMA 9°.

Date più frazioni sommarle insieme.

Operazione. Perciò fare è d' uopo primieramente ridurre le date frazioni ad avere lo stesso denominatore, se tale non l'avessero, e ciò con il metodo, dato nella precedente lezione (1): indi si sommano tutt' i numeratori, ed al numero, che se ne ricava si dà il denominatore, comune alle date frazioni; la nuova frazione così composta sarà la somma di tutte le frazioni date.

Siano le frazioni da sommarsi $\frac{3}{5}$, e $\frac{2}{3}$; ridotte queste allo stesso denominatore, e quindi sommate, come si è detto, si avrà

$$\frac{9}{15}+\frac{10}{15}=\frac{19}{15}.$$

Or, per ciò che si è detto nella quinta lezione, nel $\frac{19}{15}$ essendo il numeratore maggiore del denominatore, desso è una frazione apparente, e perciò maggiore dell' unità; quindi fatta la divisione di 19 per 15 si ha che $\frac{19}{15}=1+\frac{4}{15}$.

Dimostrazione. Poichè le frazioni si sono ridotte allo stesso denominatore, sommando tutt' i numeratori si sommano tutte le parti di unità, indicate dalle frazioni medesime, il che è quanto si è proposto di fare.

(1) La necessità di ridurre le frazioni che debbonsi sommare o sottrarre fra loro ad avere lo stesso denominatore, nasce dall' osservare che dovendosi coll' addizione riunire insieme più parti dell' unità, e con la sottrazione prenderne la differenza, conviene che esse parti siano d' un medesimo ordine, altrimenti l' operazione non sarebbe praticabile.

PROBLEMA 10°.

Date due frazioni, sottrarre della maggiore la minore.

Operazione. Si riducono prima ad avere le date frazioni lo stesso denominatore, indi si sottraggono fra loro i numeratori, ed alla differenza si dà per denominatore il denominatore delle date frazioni.

Dimostrazione. La dimostrazione del presente problema è come quella data per lo precedente. Sia p. e. da sottrarsi $\frac{2}{3}$ da $\frac{3}{4}$, si avrà

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}.$$

Corollario. Se si vorrà sommare un intiero con delle frazioni, o sottrarre da un intiero una frazione, non si farà che ridurre prima l'intero alla forma di frazione, usando il metodo dato nella quinta lezione, quindi operare come nei due ultimi problemi.

Così, volendo sommare 2 con $\frac{2}{3}$ e con $\frac{4}{5}$, sarà lo stesso che $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$, quali, ridotti allo stesso denominatore diventano $\frac{30}{15}+\frac{10}{15}+\frac{12}{15}, =\frac{52}{15}=3+\frac{7}{15}$.

Volendo poi sottrarre dall' intiero 5 la frazione $\frac{2}{3}$ si avrà,

$$5-\frac{2}{3}=\frac{15}{3}-\frac{2}{3}=\frac{13}{3}=4+\frac{1}{3}.$$

Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato se si fosse messo l' intero 5 sotto la sua espressione equivalente $4\frac{3}{3}$; in tal modo si ha:

$$5-\frac{2}{3}=4\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=4\frac{1}{3}.$$

In fine, se si vorranno sommare intieri uniti a frazioni, con intieri uniti a frazioni; opppure sottrarre intieri uniti a frazioni da altri intieri uniti a frazioni; bisognerà pria sommare gl' intieri colle rispettive frazioni, e quindi operare, come si è detto nei due antecedenti problemi.

ESEMPI.

Siano da sommarsi $2 + \frac{2}{3}$

$3 + \frac{3}{4}$

Somma $\frac{8}{3} + \frac{15}{4} = \frac{32}{12} + \frac{45}{12} = \frac{77}{12} = 6 + \frac{5}{12}$.

Vogliasi poi sottrarre da $5 + \frac{2}{3}$

il numero $3 + \frac{3}{4}$

Differenza $\frac{17}{3} - \frac{15}{4} = \frac{68}{12} - \frac{45}{12} = \frac{23}{12} = 1 + \frac{11}{12}$

LEZIONE IX.

MOLTIPLICARE E DIVIDERE LE FRAZIONI FRA LORO.

PROBEMA 11°.

Date più frazioni moltiplicarle fra loro.

Operazione. Si moltiplicano tutt' i numeratori fra lo, come pure tutt' i denominatori fra loro; la frazione, che avrà per numeratore il prodotto dei numeratori, e per denominatore il prodotto dei denominatori, sarà il prodotto delle date frazioni,

Sia da moltiplicarsi $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, sarà il prodotto di esse la frazione $\frac{8}{15}$.

Dimostrazione. Se si dovesse moltiplicare $\frac{2}{3}$ per 4, sarebbe lo stesso che prendere 4 volte $\frac{2}{3}$, il che darebbe $\frac{8}{3}$, ma non si doveva moltiplicare il $\frac{2}{3}$ per 4, ma bensì per $\frac{4}{5}$, ossia per la quinta parte di 4; dunque il prodotto $\frac{8}{3}$ è cinque volte più grande del vero; quindi, per ridurlo al giusto, devesi esso rendere cinque volte più piccolo, il che si ottiene moltiplicando per 5 il denominatore 3 (lez. 5ª. avver: 1°.), e per ciò il giusto prodotto di $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ sarà $\frac{8}{15}$.

Corollario. Dal precedente problema emerge, che, *volendosi moltiplicare un intiero per una frazione, basterà moltiplicare l' intiero pel numeratore della frazione*. In fatti

se si vorrà moltiplicare 3 per $\frac{2}{3}$, sarà lo stesso che moltiplicare $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$, é pel problema precedente, il prodotto sarà $\frac{6}{3}$.

Se poi si vorrà moltiplicare un intiero, unito ad una frazione per un intiero, unito ad una frazione, si dovrà prima ridurre ciascun intiero, colla rispettiva frazione, ad una sola frazione, e quindi operare come si è detto nel precedente problema.

Avvertimento. Qui si avverte, che moltiplicandosi una frazione vera per un altra, che sia pur minore dell'unità, il prodotto è minore sempre di ciascun fattore. In fatto moltiplichisi $\frac{3}{8}$ per $\frac{2}{3}$ il prodotto sarà $\frac{6}{24}$. Or tanto è moltiplicare $\frac{3}{8}$ per $\frac{2}{3}$, quanto moltiplicare $\frac{9}{24}$ per $\frac{16}{24}$, che sono i rotti dati ridotti allo stesso denominatore; ed è chiaro, che il prodotto $\frac{6}{24}$ è minore tanto di $\frac{9}{24}$, che di $\frac{16}{24}$.

PROBLEMA 12°.

Dividere una frazione per un'altra.

Operazione. Moltiplichisi il numeratore del dividendo pel denominatore del divisore, e 'l prodotto sarà il numeratore del quoziente. Indi si moltiplichi il denominatore del dividendo pel numeratore del divisore, e 'l prodotto sarà il denominatore del quoziente.

Se si vorrà, p. e. dividere $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ il quoziente sarà $\frac{10}{12}$.

Dimostrazione. Se ci vien proposto di dividere $\frac{2}{3}$ per 4, sarà lo stesso che prendere la quarta parte di $\frac{2}{3}$, ossia avere una frazione, quattro volte più piccola di $\frac{2}{3}$, il che si ottiene rendendo quattro volte maggiore il suo denominatore 3; ovvero moltiplicando il 3 per 4 (Lez. 5.), e la frazione cercata sarà $\frac{2}{12}$; ma, nell' esempio proposto, non si vuole dividere $\frac{2}{3}$, per 4, bensì per $\frac{4}{5}$ vale a dire per la quinta parte di 4, dunque il quoziente $\frac{2}{12}$ è cinque volte minore di quel, che si otterrebbe dividendo $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$; ed in conseguenza, se si moltiplica il $\frac{2}{12}$ per 5, si otterrà $\frac{10}{12}$, cinque volte maggiore di $\frac{2}{12}$, e che sarà il vero quoziente cercato.

Avvertimenti. Qui si noti, che nella divisione de' rotti accade l' opposto di ciò che si è notato nella moltiplica di essi; vale a dire il quoziente che si ottiene è sempre maggiore tanto del dividendo, che del divisore. In fatto nell' esempio dato di sopra si vede essere il quoziente $\frac{10}{12} >$ tanto di $\frac{2}{3}$, che di $\frac{4}{5}$, come può agevolmente scorgersi riducendoli ad avere lo stesso denominatore e paragonandone i numeratori.

Nel calcolo de' rotti adunque la moltiplica, e la divisione corrispondono rispettivamente alla divisione, ed alla moltiplica degl' intieri.

Si avverte inoltre, che se si vorrà dividere una frazione per un intiero, si praticherà la regola generale di dare pria all' intiero la forma di frazione, e quindi si opererà, come si è detto nel precedente problema. Così, se vorrà dividersi $\frac{2}{5}$ per 3, sarà lo stesso che dividere $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{1}$ e si avrà $\frac{2}{15}$. Si sarebbe ottenuto lo stesso moltiplicando direttamente il denominatore 5 della data frazione per l' intero 3.

Riepilogando finalmente tutto ciò che si è precedentemente detto intorno alla moltiplica, e divisione delle frazioni, si può tutto restringere nel seguente quadro.

Moltiplicando Dividendo	il numeratore	si moltiplica si divide	la frazione
Moltiplicando Dividendo	il denominatore	si divide si moltiplica	la frazione

Dal che si fa manifesto che una frazione si può moltiplicare in due maniere, cioè moltiplicando il suo numeratore, o dividendo il suo denominatore; come si può del pari dividere la frazione in due maniere, o dividendo cioè il suo numeratore, o moltiplicando il suo denominatore.

LEZIONE X.

FRAZIONI DECIMALI.

Definizioni. Diconsi *frazioni decimali* quelle frazioni ordinarie che hanno per denominatore l' unità, seguita da uno, o più zeri: tali sono $\frac{3}{10}$, $\frac{35}{100}$, ec. Si è convenuto, che quando si hanno numeri intieri, uniti a frazioni decimali, si separano quelli da queste col mezzo di un punto; quale convenzione, perchè sia generale, si estende pure a far precedere sempre il decimale da un zero, ponendo fra essi un punto, quando intieri non ve fussero, dinotandosi col zero il luogo degli intieri, in loro mancanza. Per semplificare poi l'espressioni decimali, si trascura sempre di scrivervi il denominatore, perchè dal numeratore si viene immediatamente in conoscenza del denominatore, come appresso meglio spiegheremo. Così la espressione 25 intieri col decimale $\frac{3}{10}$, per le accennate convenzioni, si scriverà 25. 3; e la sola frazione $\frac{32}{100}$ si scriverà 0. 32.

Avvertimenti. Abbiamo detto, che dalla sola ispezione del numeratore si conosce, nelle frazioni decimali, il denominatore, il che è facilissimo a comprendersi, dappoichè, avendo tali frazioni per denominatore uno de' numeri 10, 100, 1000, ec., così, quelle che esprimono parti decime non possono avere, nel numeratore, che numeri di una cifra, giacchè da 1 a 10 non vi sono che numeri di una cifra; per la stessa ragione, quelle che indicano parti centesime non possono avere, che

numeratori di due cifre al più; come l' espressioni decimali di parti millesime, non possono avere che denominatori al più di tre cifre, ec. Or le frazioni decime, avendo per denominatore l' unità seguita da uno zero, le centesime l' unità seguita da due zeri, ec., è evidente che il numero de' zeri corrisponde a quello delle cifre del numeratore, vale a dire che i zeri del denominatore devono esser tanti, quante sono le cifre del numeratore. Con questo principio adunque si vedrà subito, che l' espressione 0. 3 indica *tre decime*, non potendo il 3 avere per denominatore che l' unità seguita da un zero; 0. 25, avrà per donominatore 100, e perciò indicherà 25 parti centesime; 0. 252 parti millesime, ec.

Corollario. Dalla ispezione delle frazioni decimali, si concepisce facilmente, che la prima cifra dopo il punto, esprime parti decime, la seconda parti centesime, la terzá parti millesime ec. In fatti seguendo la nostra asertiva convertiamo l' espressione 0. 352 nell' altra $\frac{3}{10}$ $+ \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$ e riducendo queste ad avere lo stesso denominatore, si avrà

$$\frac{300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{352}{1000} = 0{,}352 ,$$

ch' è la espressione data.

Finalmente perchè quest' ultime tre frazioni sono equivalenti alle precedenti $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$, sarà

$$\frac{3}{10} = \frac{300}{1000}, \text{ e } \frac{5}{100} = \frac{50}{5000}, \text{ ovvero}$$

$$0.\ 3 = 0.\ 300, \text{ e } 0.\ 05 = 0.\ 050$$

dal che si deduce, che *una frazione decimale non cambia di valore per quanti zeri si aggiungono alla sua destra.*

Non così accade se i zeri si aggiungono alla sinistra di una espressione decimale; in fatti, se alla espressione 0. 3 aggiungesi il zero alla sinistra del 3, si avrà 0. 03, e pel principio sopra stabilito, il 3, non occupando più il primo posto, ma bensì il secondo, indicherà parti dieci volte minori, ossiano centesime; se a 0. 25 vi si aggiunge un zero a sinistra, si avrà 0. 025, e con ciò il 2 indicherà non più parti decime, ma bensì centesime, e il 5 non più parti centesime, ma millesime, vale a dire il 0 ha fatto diminuire dieci volte la espressione 0. 25.

Inoltre, se alla sinistra di un' espressione decimale si aggiungono due zeri, si avrà, p. e., che 0. 3, si cangerà in 0. 003, ed il 3, da parti decime, indicherà parti millesime, perchè occupa il terzo luogo dopo il punto; simile raziocinio valendo per le altre espressioni 0. 25, e o. 352, che diventerebbero 0. 0025, 0. 00352, si osserva, che due zeri, messi alla sinistra dell'espressione decimale la fan divenire cento volte minore, ovvero la dividono per cento. Con eguale raziocinio si scorgerà, che tre zeri la dividono per mille; quattro zeri per diecimila ec.

Dal sopradetto deriva il seguente generale principio: *volendosi una espressione decimale qualunque dividere per 10, per 100, per mille ec. basterà porre alla sua sinistra uno, due, tre zeri, ec.*

PROBLEMa 13°

Data una frazione ordinaria ridurla a decimale.

Operazione. Sia data la frazione ordinaria $\frac{3}{5}$: Si moltiplichi il numeratore 3 per 10, ed il prodotto si divida pel denominatore 5; si avrà il quoziente esatto 6;

sarà 0. 6 la frazione decimale, che corrisponde alla ordinaria. $\frac{3}{5}$.

Dimostrazione. Poichè si è moltiplicato il numeratore 3 per 10, il quoziente 6, ottenuto dalla divisione del 30 pel 5 è dieci volte più grande di quel che corrisponde al 3 diviso per 5; perciò bisogna ridurlo dieci volte minore per corrispondere a quello, che conviene alla frazione ordinaria $\frac{3}{5}$, ossia il 6 devesi dividere per 10, dal che si ottiene $\frac{6}{10}$, ossia 0. 6, ch'è la giusta frazione decimale, che corrisponde all'ordinaria. $\frac{3}{5}$.

Sia inoltre la frazione ordinaria $\frac{2}{3}$, che si vuol ridurre a decimale: pel problema antecedente, bisogna dividere 20 per 3, il che dà il quoziente 6, e 'l residuo 2; or, volendo approssimare il quoziente per quanto è possibile, alla vera espressione decimale, dovuta a $\frac{2}{3}$, bisogna proseguire la divisione del resto 2, moltiplicandolo per 10, ossia di 20, pel divisore 3, e si avrà l'altro quoziente 6, ed il residuo 2; proseguendo, finchè si vuole, una tal divisione, come si è fatto pel primo residuo, si avrà l'espressione decimale 0. 6666, ch'è l'approssimativa all'ordinaria $\frac{2}{3}$, quale approssimazione si può portare sino all'infinito, senza mai toccare il vero valore decimale, che corrisponde a $\frac{2}{3}$, benchè sempre vi si vada avvicinando, colle successive divisioni.

Questa maniera di tradurre le frazioni ordinarie in de-

cimali rendesi utilissima nelle circostanze delle divisioni, che non danno un quoziente esatto; potendosi con tal traduzione portare il quoziente, per quanto si vuole, più vicino al vero. Così se si debba dividere 32 per 7, si avrà il quoziente 4, con la frazione $\frac{4}{7}$, quale frazione, ridotta, col metodo precedente, a decimale, ci dà l'espressione decimale 0. 571, e quindi il quoziente più esatto di 32 diviso per 7 sarà 4. 571 ec.

Queste approssimazioni però si adoperano in quei calcoli, che esigono una somma precisione, mentre nei calcoli ordinarî si possono trascurare le parti millesime, ed anche le centesime; anzi è da sapersi, che, *trascurandosi nell'espressioni decimali un numero di cifre qualunque, l'errore non è giammai uguale ad una unità dell'ultima cifra non trascurata*. In fatti nella frazione decimale p. e. 5. 3999, se si trascurano tutte le cifre, che succedono al 3, si avrà 5. 3; or $0.3 = \frac{3}{10}$, e la parte trascurata $0.0999 = \frac{999}{10000} < \frac{1}{10}$, dappoichè bisogna aggiungere 1 a 999, per aversi $\frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$.

LEZIONE XI.

Delle frazioni decimali la *somma*, e la *sottrazione* si esegue all'ordinario modo, disponendosi l'uno sotto l'altro i dati numeri, in modo che le cifre corrispondano nella medesima colonna verticale, le parti decime, cioè, alle parti decime, le centesime alle centesime ecc. e quindi si opera, come si è detto pei numeri intieri.

Siano p. e. da sommarsi i decimali 0. 702, 0. 7, 0. 25. Si dispongano come siegue

	0. 702
	0. 7
	0. 25
La somma di essi è	1. 652

Tutto ciò è evidente, dietro la riflessione, che le cifre delle frazioni decimali aumentando da destra a sinistra, come quelle degl'intieri in proporzione decupla, il modo di addizionarle dev'esser lo stesso.

Siano da sottrarsi	0. 040
	0. 032
Differenza	0. 008

In questo esempio si è messo il zero dopo il 4, nel numero maggiore, sol per indicare, che in esso numero non vi sono parti millesime, da cui si deve togliere il 2 del sottraendo; e perchè, come si è detto nella precedente lezione, i zeri, alla destra dei numeri decimali non ne alterano il valore.

Se colle frazioni decimali si troveranno uniti numeri interi, questi verranno pur sommati, o sottratti fra loro nel solito modo, e nel corrispondente luogo, pria del punto.

La *moltiplica* de' numeri decimali si esegue benanche nel modo, che si è detto per i numeri intieri, colla so-

la differenza, che nel prodotto si devono distaccare, dalla destra verso la sinistra, tante cifre decimali, quante ve ne sono nel moltiplicando, e nel moltiplicatore. Come p. e. volendosi moltiplicare 7. 12 per 2. 3 si farà

$$\begin{array}{r} 7.\ 12 \\ 2.\ 3 \\ \hline 2136 \\ 1424 \\ \hline \text{Prodotto } 16.376 \end{array}$$

Nel qual prodotto si sono distaccate tre cifre decimali da destra a sinistra, perchè tre sono in totale quelle del moltiplicando, e quelle del moltiplicatore.

La ragione di tale operato è chiara, se si riflette, che il moltiplicando 7. 12 si può mettere sotto la forma di $\frac{712}{100}$, e 'l moltiplicatore sotto l' altra di $\frac{23}{10}$, quali, moltiplicati al modo di frazioni ordinarie, danno il prodotto $\frac{16376}{1000}$, e questa frazione apparente semplificata colla divisione del numeratore pel denominatore, dà il quoziente in forma decimale 16. 376, ch'è la espressione di sopra ottenuta.

Finalmente *dividere* l'un per l'altro due numeri decimali è una operazione che si esegue come la divisione degl'intieri, solamente avvertendo di porre a destra di quello de' due numeri dati che ha meno cifre decimali tanti zeri, quante cifre mancano per equiparare quelle che si trovano nell'altro, e quindi facendo astrazione dal punto, si procederà alla divisione come fra numeri intieri.

E perchè i casi di divisione possono essere 1°: fra due numeri che contengono ambi cifre decimali; 2°: fra due

numeri de' quali uno contiene decimali, e l'altro no, noi daremo un esempio per ogn' uno di tali casi.

1°. Sia da dividersi 315. 432 per 23. 4. Per la regola data l'ultimo numero si congerà in 23. 400; e facendo astrazione dal punto, la divisione deve aver luogo fra 315432 dividendo e 23400, divisore, il che fatto al modo ordinario si ottiene per quoziente 13 $+\frac{11232}{23400}$.

2°. Sia da dividersi 31 per 0.074; preparando questi numeri come si è fatto nel caso precedente, si avrà 31.000 dividendo, e 0. 074 divisore, ond'è che la divisione deve farsi fra 31000, e 074, il che fatto si ottiene il quoziente 7175 $+\frac{50}{74}$.

In ambi i casi esaminati non si sono ottenuti quozienti esatti, ma bensì de' numeri accompagnati da frazioni; le quali possono agevolmente trasformarsi in frazioni decimali col metodo dato nel problema 13°: dietro di che si otterrà pel primo caso il quoziente 13, 48, e pel secondo 1775. 67.

La ragione di tali operazioni è chiara se si riflette che il quoziente di due numeri non dipende dalla grandezza assoluta delle loro unità, purchè questa sia la medesima nell'uno, e nell'altro; quindi ridotti il dividendo, ed il divisore a decimali dello stesso ordine, ponendo alla destra di quello che manca di cifre decimali il debito numero di zeri, la soppressione del punto renderà ambedne il medesimo numero di volte maggiori, e quindi il quoziente sarà il dovuto.

LEZIONE XII.

DEI NUMERI COMPLESSI

I bisogni della società sovente ci obbligano a valutare la quantità di certi oggetti, come sono le monete, i pesi delle merci, il tempo, le distanze ec. Ora per valutare siffatte quantità non vi è altro mezzo che di rapportarle ad un'altra quantità cognita della medesima natura, e stabilita per unità. Intanto alcune di quelle quantità sono multiplici, ed altre summultiplici dell' unità suddetta, cioè alcune ne sono il doppio, il triplo, il quadruplo ec., ed altre ne sono la metà, la terza parte, la quarta parte ec.; per la qual cosa le regole finora insegnate pel calcolo de' numeri interi e delle frazioni sarebbero sufficienti a calcolar eziandio queste sorti di quantità. Ma il calcolo delle frazioni riuscendo malagevole specialmente negli usi civili, si è pensato di dividere e suddividere l'unità primitiva in un certo numero di parti uguali, e di considerarle come tante unità di diversa specie. Così la *canna* napoletana si è per lo passato considerata divisa in 8 parti uguali detti *palmi*; il palmo in 12 parti uguali dette *once;* ed ogni oncia suddivisa in 5 parti uguali detti *minuti.*

Questa considerazione ha richiamato alle quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica il calcolo di queste specie di numeri, i quali si chiamano *denominati* ovvero *complessi.* Ma prima d' intraprenderne il calcolo, bisogna sapere quante unità di una specie compongono la unità della specie superiore. Una tal conoscenza è affatto necessaria, e si può apprendere presso quegli autori che hanno scritto dei trattati espressi su i pesi e su le misure.

Noi qui insegneremo l' addizione e la sottrazione non

che la moltiplicazione e la divisione de' numeri complessi, e ritenendo l' antica divisione della canna napolitana, supponiamo, che siaci proposto, per esempio, di sommare i seguenti numeri:

canne	palmi	oncie	minuti
36	6	9	3
15	3	6	2
17	4	5	0
7	0	3	1
76	7	0	1

Incominciando dall' infima specie, cioè dai minuti, troviamo la somma di questi esser 6, vale a dire 1 oncia ed 1 minuto; scriviamo 1 sotto la colonna dei minuti, e riserbiamo 1 oncia per unirla alla somma seguente. Or la somma delle oncie è 23, che con 1 oncia ritenuta su i minuti fa 24, cioè 2 palmi: notiamo dunque 0 sotto la colonna delle once, e riserbiamo 2 palmi per aggiungerli alla somma de' palmi. Questi aggiunti insieme fanno 13, e quindi 15 unendovi i 2 palmi ritenuti su la somma delle once; poniamo perciò 7 sotto la colonna dei palmi, e riteniamo i rimanenti 8 che costituiscono 1 canna. Finalmente fa d' uopo che alla somma delle canne, la quale è 75, aggiungiamo ancor 1, e con ciò la somma delle canne risulterà 76. Sicchè la somma dei numeri proposti è 76 canne, 7 palmi ed 1 minuto.

Da ciò si vede che per aggiungere insieme i numeri complessi, bisogna scrivere gli uni sotto gli altri, in modo che quelli della medesima specie sieno nella medesima vertical colonna; indi, incominciando dalla specie infima, sommare secondo l'ordinario i numeri di ciascuna specie, ritenere le unità della specie superiore per unirle alla somma seguente, e notare il resto sotto la specie cui appartiene.

Passiamo ora a vedere come si sottraggono i numeri complessi: noi faremo il calcolo su le *tese*; premettendo che la tesa si compone di 6 *piedi*, ogni piede di 12 *pollici*, ogni pollice di 12 *linee*, ed ogni linea di 12 *punti*. Vogliasi, per esempio, sottrarre.

	tese		piedi		pollici		linee		punti
da	15	.	3	.	7	.	8	.	2
	8	.	4	.	3	.	10	.	7
	6	.	5	.	3	.	9	.	7.

Si vede al primo sguardo che da 2 punti non si possono togliere 7 punti, prendiamo perciò ad imprestito dalla cifra 8 una linea, la quale fa 12 punti, e coi 2 punti fa 14 da cui tolto 7, resta 7: notiamo adunque 7 sotto la linea al posto dei punti. La cifra 8 esprimente linee non vale più che 7 linee, da cui non possiamo togliere 10 linee; onde prendiamo ad imprestito 1 pollice dalla cifra 7 che significa pollici; siccome un pollice vale 12 linee, queste con le 7 linee faranno 19 linee da cui si potranno togliere 10 linee; il resto è 9, che scriveremo sotto le linee. Or da 6 pollici (essendosi 1 pollice già prestato alle linee) tolti 3 pollici, resta 3; dunque notiamo 3 sotto i pollici. Non potendosi da 3 piedi sottrarre 4 piedi, ricorriamo alle tese dalle quali prendiamo a prestito una 1 tesa, cioè 6 piedi; questi 6 piedi, e 3 piedi daranno un totale di 9 piedi, da cui 4 si può sottrarre; il resto è 5, che noi scriveremo sotto la colonna de' piedi. Finalmente togliamo 8 tese da 14 tese, e notiamo il resto 6 sotto la colonna delle tese. Sicchè l'addimandato residuo è 6 tese, 5 piedi, 3 pollici, 9 linee e 7 punti.

Da ciò che si è detto si rileva, che per fare la sot-

trazione dei numeri complessi, bisogna togliere i numeri inferiori dai numeri superiori della medesima specie, incominciando dalla minima, e notare sotto la linea i resti a misura che si ottengono: se qualche numero inferiore non si può togliere dal corrispondente numero superiore, si prenderà ad imprestito una unità dal numero della specie immediatamente più alta, e tale unità si scioglierà in unità della specie che prende ad imprestito; e si proseguirà l'operazione come si è detto pe' numeri intieri.

LEZIONE XIII.

SIEGUE IL CALCOLO DE' NUMERI COMPLESSI

MOLTIPLICA

Se il moltiplicando solo è complesso l'operazione si esegue con i soliti metodi, giacchè non si tratta che di ripeterlo tante volte quante sono le unità del moltiplicatore; e cominciando dalla classe infima delle unità del moltiplicando, si avrà cura di riportare nelle successive classi le unità maggiori che se ne ricavono.

Cerchisi p. e. la mercede che spetta ad un'operaio, che à travagliato per 25 giorni alla ragione di due ducati e 10 grani al giorno. Trattasi in questo esempio di ripetere 25 volte il numero complesso $2^d : 10^{g.}$, il che si esegue nel modo seguente

$$\begin{array}{r} 2^d : 10^{g.} \\ 25 \\ \hline 52 : 50 \end{array}$$

ove si vede che ripetuta 25 volte l'infima classe 10 del moltiplicando si hanno 250 grani, ovvero 2 ducati, e 50 grani, quindi si segnano al debito luogo li 50 grani, e si riportano i 2 ducati per aggiungerli alla classe seguente. Ripetuti poi 25 volte i ducati 2, si hanno 50, cui uniti i ducati 2 ottenuti dalla moltiplica della precedente classe hassi l'ammontare in ducati 52, che intiero si segna nel proprio luogo.

Quando poi il moltiplicando, e 'l moltiplicatore sono ambi complessi, in tal caso converrà praticare delle ri-

duzioni su di essi, che meglio spiegheremo col seguente esempio.

Domandasi in costo di una muraglia lunga 3 tese, e 2 piedi, calcolata alla ragione di ducati 2, e grana 30 la tesa.

In primo luogo riducansi le 3 tese a piedi, moltiplicandole per 6, numero de' piedi, che compongono una tesa; e si avranno 18 piedi; a questi si aggiungano i due piedi, che fanno parte della lunghezza della muraglia, e si otterranno in unum 20 piedi.

Similmente riducansi a grana i ducati 2, moltiplicandoli per 100, e si avranno 200 grana, a quali aggiunte le 30 grana, parte del prezzo di una tesa di fabbrica, si avranno 230 grani.

Or, se si moltiplica il 230 per 20, si avrà il prodotto 4600 grani che sarebbe l'importo della fabbrica, se la medesima costava grana 230 il piede; ma non è il piede, che costa grana 230, ma bensì la tesa; vale a dire che il prodotto 4600 grani è sei volte più grande, onde dividendosi esso per 6 si avrà il quoziente in ducati 7, grana 66, e decimi 6, importo della intiera lunghezza della muraglia.

Quindi riterremo come regola generale in simili quistioni di *ridurre alla minima specie il moltiplicando e 'l moltiplicatore, e fra loro moltiplicarli alla ordinaria maniera: il prodotto poi dovrà dividersi pel numero, che indica quante volte la più grande unità, che trovasi nell' espressione, di cui cercasi il costo, contiene l' unità minima di essa.* Come appunto, nell' addotto esempio, il prodotto 4600 è stato diviso per 6 numero che indica quante volte la tesa, unità maggiore della data fabbrica, contiene il piede, unità minima, che si contiene nella espressione medesima.

Ecco un altro esempio: quanto costano 12 canne, (antica misura) 6 palmi, e 4 once di castoro, calcolandosi

il valore di ciascuna canna a ducati 7 grana 25, e decimi 3?

Ridotte le canne a palmi si avrà di questi il numero 102, che ridotto ad once si avranno in unum once 1128. Similmente ridotto il denaro tutto a decimi si avranno 7253 decimi. Quindi moltiplicato 1228 per 7253 si avrà 8906684.

Or il numero 8906684 esprimerebbe l'importo delle 1228 once, se ciascuna oncia costasse 7253 decimi; ma non è l'oncia che costa 7253 decimi, ma bensì la canna, la quale si compone di 96 once, dunque, se dividesi il prodotto 8906684 per 96, il quoziente indicherà il costo dell'intiero castoro in ducati 92, gr. 77, e 7 decimi con altra frazione trascurabile.

DIVISIONE

Nella divisione come nella moltiplica de' numeri complessi è da notarsi il caso in cui il dividendo solo è complesso, e quando lo sono il dividendo, e 'l divisore. Nel primo caso bisogna ridurre il dividendo complesso alla sua infima classe; così ridotto dividerlo pel divisore, e dal quoziente ricavarne le unità complesse, che se ne potranno. Ecco un esempio.

Cinque uomini travagliando ugualmente, e nello stesso tempo, hanno lucrato ducati 8, e grana 15; quanto ricada a ciascuno? Trattasi qui di dividere $8^{d} : 15^{g}$ per 5, si avrà

```
815gr.   | 5
5        |----
---      | 163
31
30
 15
 15
---
```

Ove i ducati 8, e gr: 15 del dividendo ridotti tutti a

grani, hanno dato il numero 815, che diviso pel divisore 5, si è avuto il quoziente 163 grani, da cui ricavati i ducati, si ha per la parte spettante a ciascun operaio duc: 1, e gr: 63.

Il caso in cui il dividendo, e il divisore sono complessi, lo tratteremo col seguente esempio.

Due tese, e 5 piedi di fabbrica hanno costato ducati 5 e grana 20; quanto ricade per ciascuna tesa? Ridotte le tese a piedi, si avranno 17 piedi di fabbrica totale data. Ridotti i ducati e grana, daranno 520 grana, importo de' 17 piedi di fabbrica.

Or, dividendosi 520 per 17, si ha il quoziente in grana $30 + \frac{10}{17}$, importo di un piede; ma la tesa essendo composta di 6 piedi, ognun vede, che moltiplicandosi $30 + \frac{10}{17}$ per 6, si avrà il costo della tesa il che fatto si ha lo importo domandato essere gr.$183 + \frac{9}{17}$.

Qui si noti, che la scelta del dividendo, e del divisore, in simili quistioni, dipende dalla natura del quesito. Nell' esempio qui riportato era chiaro, che il denaro doveva essere il dividendo, perchè si è domondato l' importo di una tesa, come quoziente.

Avvertimento. Spesso accade che una frazione decimale, od ordinaria, debbasi valutare in particolari espressioni di commercio. Come p. e. se si ha la frazione decimale 0. 72 di tesa, e si volesse conoscere il valore di tale espressione in parti ordinarie di tesa, in tal caso considerando, che la tesa è composta di 6 piedi, tanto sarà dire 0. 72 di tesa, quanto 0. 72 di 6 piedi; quindi bisogna moltiplicare la data espressione decimale per 6, e si avrà 4. 32, ove l' intiero 4 indica piedi, e 32, parti centesime di un piede. Or, essendo il piede composto di 12 pollici, pel raziocinio qui sopra fatto, de-

vesi moltiplicare il 32 per 12, e si avrà 3. 84, ossia 3 pollici e 84 centesimi di pollici: vale a dire che l' espressione data 0. 72 di tese, contiene 4 piedi, 3 pollici, e 84 centesimi di pollici. E volendosi portare più innanzi la valutazione si deve moltiplicare 84 per 12, che sono le linee, che compongono un pollice, e si avrà 10. 08, ossiano 10 linee, e 8 centesimi di linea: quindi

Piedi Pollici Linee.
0. 72 di tesa $=$ 4 : 3 : 10 $+$ 8 centesimi di linea.

Così pure, se si vorrà valutare in unità di moneta la frazione ordinaria $\frac{3}{5}$ di ducato; poichè il ducato è composto di 100 grani bisognerà moltiplicare la frazione $\frac{3}{5}$ per 100, e si avrà $\frac{300}{5} = 60$. gr.

Con questo metodo generale, e con la conoscenza delle suddivisioni delle particolari unità degli oggetti di commercio, si potrà valutare ogni frazione che ci verrà data.

LEZIONE XIV.

RAGIONI E PROPORZIONI

La teorica delle ragioni, e proporzioni benchè sia di attinenza dell' Algebra, pur tuttavia vogliamo comprendere in queste elementari istituzioni una tale conoscenza perchè la riputiamo indispensabile per lo intendimento della Geometria. E per serbare la debita chiarezza in ciò che saremo per esporre sul proposito, anteponiamo i seguenti assiomi.

1.

Se a grandezze uguali si aggiungono quantità uguali, le risultanti sono benanche uguali.

2.

Se da grandezze uguali si tolgono parti uguali, le rimanenti sono benanche uguali.

Corollario. Siegue dai due precedenti principî che se due grandezze uguali si moltiplicano, o si dividono per una stessa grandezza, le risultanti sono sempre fra loro uguali, non essendo la moltiplica e la divisione, che rispettivamente le operazioni di somma, e sottrazione in un modo abbreviato.

RAGIONI.

Definizioni. Intendesi per ragione il paragone di due grandezze omogenee. Or questo paragone potendosi fare in due maniere, cioè, circa l' eccesso di una grandezza

sull' altra, e circa la continenza di una nell' altra; questa doppia specie di rapporto ha fatto notare una duplice ragione. Si è detta *ragione aritmetica* quella, che stabilisce il rapporto fra due grandezze omogenee, in quanto all' eccesso, o difetto di una sull' altra. *Si è detta ragione geometrica* quella, che stabilisce il rapporto fra due grandezze omogenee, in quanto alla continenza di una nell' altra.

Così, sarà aritmetica la ragione di 5, a 3, se si considera che la differenza fra essi, o l' eccesso di 5 su 3, è spressa da 2. Sarà geometrica la ragione di 9 a 3, se si prende a calcolare che il 9 contiene tre volte il 3.

Noi tratteremo qui della ragione geometrica, e cominceremo dal notare, che, dovendo ogni ragione contener due termini, il primo di essi dicesi *antecedente*, il secondo *conseguente*, e 'l numero, tanto intiero, che frazionario, che esprime la continenza di una grandezza nell' altra, dicesi *quantità*, o *esponente* della ragione.

Or, essendo l' esponente di una ragione quello che ne dinota il valore, ne risulta in conseguenza, 1°. che le ragioni, che hanno i medesimi esponenti sono uguali: 2°., che due ragioni ciascuna uguale ad una terza ragione, sono uguali fra loro, giacchè uguali riescono gli esponenti di esse. Così il rapporto di 12 a 6 si dirà essere uguale a quello di 8 a 4, perchè 12 contiene 2 volte il 6, come 8 contiene 2 volte il 4.

Il rapporto geometrico adunque non è che la divisione fatta fra i due termini della ragione, perciò potrebbe esprimersi a modo di frazione, il cui numeratore è l' antecedente e 'l denominatore il conseguente (1); ma per conven-

(1) È arbitrario il dividere l' antecedente pel conseguente, e viceversa; una volta però che si è adottato uno dei citati sistemi in un calcolo deve sempre seguirsi lo stesso.

zione tale rapporto si esprime frapponendo due punti fra l'antecedente, ed il conseguente; il rapporto di 6 a 3 si scrive 6 : 3.

Dal già detto rilevasi che non si altera la quantità di una ragione se si moltiplica, o si divide sì l'uno che l'altro termine di essa per la medesima grandezza, come accade nei rotti.

Così sarà la ragione di $6 : 3 = 30 : 15 = 2 : 1$, giacchè il 6, ed il 3 si sono una volta moltiplicati ciascuno per 5, ed un altra ciascuno diviso per 3, restando in in ambo i casi sempre 2 per quantità di ragione.

N. B. Per generalizzare i risultati della teorica, che trattiamo faremo uso delle lettere alfabetiche per esprimere le quantità che si prendono a calcolare.

È *semplice* quella ragione, che si ha paragonando due sole grandezze; ma se una ragione ha per quantità il prodotto degli esponenti di più ragioni semplici questa si dirà *composta;* e sarà *duplicata*, *triplicata* ec. secondo che le ragioni semplici, che la compongono saranno due, tre ec. ed eguali tra loro.

Si è convenuto di segnare le ragioni componenti la ragion composta, chiudendo ciascuna fra due parentisi. Così se la ragione di $M : N$ è composta delle altre $A : B$, e $C : D$, si esprimerà l'eguaglianza tra essa, e le componenti nel modo seguente.

$$M : N = (A : B)\ (C : D).$$

Se nel paragone di due ragioni si osserva, che per quanto l'antecedente della prima contiene il suo conseguente, o n'è contenuto, per altro tanto l'antecedente della seconda contiene il suo conseguente, o n'è contenuto; si diranno tali ragioni *dirette*; ma se poi l'antecedente della prima ragione contiene il proprio conseguente, o n'è contenuto, per quanto il conseguente della seconda ragione

contiene il suo antecedente, o n'è contenuto, tali ragioni si diranno una *inversa* dell' altra.

Quando l' antecedente di ciascuna ragione è uguale al rispettivo conseguente, le ragioni si dicono di *eguaglianza*.

Così se nel paragonare il rapporto di $A : B$ a quello di $C : D$, si osserva, che per quanto A contiene B, o è da B contenuto, per tanto C contiene D, o è da D contenuto, sarà la ragione di $A : B$ diretta di quella di $C : D$; ma se A contiene B, o è da B contenuta, per quanto D contiene C, o è da C contenuta, sarà $A : B$ uguale alla inversa ragione di $C : D$.

E poichè considerandosi D antecedente, e C conseguente ne risulta che il rapporto di continenza fra D, e C è come quello fra A, e B; perciò la ragione di $A : B$ diventerà diretta di quella di $C : D$ se si paragonerà D a C; val quanto dire.

« *Una ragione, che è inversa di un altra ne diviene di-*
« *retta cambiando in essa l' antecedente in conseguente, e 'l*
« *conseguente in antecedente* ».

Rappresenti $M : N$ una ragione composta dalle semplici $A : B$, $C : D$, $E : F$, sarà, passando alla quantità rispettive.

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}$$

e quindi spiegandone i rapporti sarà

$$M : N = A \,.\, C \,.\, E : B \,.\, D \,.\, F, \text{ ossia}$$

» *La ragion composta da più ragioni semplici, è uguale*
» *al paragone del prodotto di tutti gli antecedenti al pro-*
» *dotto di tutti i conseguenti di esse ragioni.*

LEZIONE XV.

PROPORZIONI

Definizioni. L'eguaglianza di due ragioni dicesi *proporzione*. Quindi ogni proporzione deve essere necessariamente composta di quattro termini.

Ciò posto, supponendo la ragione $A : B$ essere uguale all'altra $C : D$, sarà $A : B = C : D$ una proporzione.

Or siccome nelle proporzioni si contempla l'eguaglianza di due ragioni, e per conseguenza quella di due quantità, quando dalle ragioni si passa agli esponenti rispettivi, così è necessario darsi qui una breve idea dell'eguaglianza di due espressioni, detta in Algebra *equazione*.

L'equazioni sono di diverse specie; noi però senza entrare nel novero di esse, ci limiteremo a darne le idee generali, necessarie al bisogno, in cui siamo.

L'equazione come si è detto, è l'eguaglianza di due espressioni, fra loro separate col segno =. Tutto ciò che trovasi dalla medesima parte di detto segno chiamasi *membro*; quindi ogni equazione costa di due membri: quello messo alla sinistra di chi legge dicesi *primo membro*, ed il rimanente *secondo*.

L'equazioni si adoperano nella risoluzione di quelle quistioni, che hanno per oggetto di determinare il valore delle quantità incognite per mezzo de' rapporti che esse hanno colle cognite.

Quindi tutto riducesi a saper isolare la quantità incognita in un membro, e tutte le quantità note riunirle nell'altro, il che si esegue mediante talune operazioni, che andiamo ora ad esporre.

Bastano le nozioni di aritmetica finora apprese per convincerci che la quantità incognita, che suole esprimersi

ordinariamente con una delle lettere x, y, z, non può trovarsi combinata con altre quantità se non che in tre modi diversi: 1° per addizione, e sottrazione: 2° per addizione, sottrazione, e moltiplicazione; 3° finalmente per addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione.

Si libera l' incognita dalle addizioni, e sottrazioni di altre quantità cognite, riunendo in un sol membro tutti i termini che contegono l'incognita, e nell' altro le quantità note: *p e.* $7x - 5 = 12 + 4x$; in questa equazione fa d' uopo che il termine $4x$ passi dal secondo nel primo membro, e 5 passi dal primo membro nel secondo. A tale oggetto conviene riflettere che cancellando $+4x$ nel secondo membro, si viene questo a diminuire della quantità $4x$, e che per conservare l' eguaglianza dei due membri conviene operare la sottrazione medesima nel primo membro (ass: 2° lezione 14): avremo dunque

$$7x - 5 - 4x = 12:$$

cancellando poi -5 dal primo membro vuol dire non dar luogo alla sottrazione della quantità 5 dal detto membro, il che suona accrescere tal membro di 5 unità, per lo che bisogna operare l' aumento medesimo nel secondo membro, e ciò scrivendovi $+5$; avrassi così

$$7x - 4x = 12 + 5;$$

ed eseguendo tali operazioni, avremo $3x = 17$

Quanto si è detto nel presente esempio potendosi applicare a qualunque altro, osserviamo in generale, che *per far passare un termine da un membro all' altro di una equazione, basta cancellarlo nel membro ove si trova, e scriverlo nell' altro col segno contrario a quello che esso termine conservava.*

Si noti che il primo termine di un membro di una equazione quando è privo di segno, s' intende affetto dal segno $+$.

Dietro quanto si è detto qui innanzi riesce facile praticare la riunione in un membro di tutte le quantità che contegono l' incognita ; e giusta l' operato nell' addotto esempio , siam giunti a trasformare la data equazione $7x - 5 = 12 + 4x$ nell' altra più semplice $3x = 17$. In questa l' incognita x trovasi affetta dal moltiplicatore 3 , che dicesi *coefficiente*, e dal quale conviene liberare l' incognita. Or chi non vede , che il termine $3x$ si compone di due fattori , uno cognito 3 , e l' altro incognito x , e che dividendo detto termine $3x$ pel fattore cognito 3 , si avrà l' altro fattore x : e perchè una tale operazione non distrugga la equazione $3x = 17$, fa mestieri che anche il 17 si divida per 3 , e si avrà in fine $x = \frac{17}{3}$.

Da quanto si è detto ricavasi la seguente regola : *quando , dopo di aver riuniti in sol membro tutte le quantità contenenti l' incognita , risulta la medesima affetta da coefficiente , se ne renderà libera dividendo l' altro membro , composto di tutti termini noti, pel coefficiente dell' incognita.*

In fine non resta ad esaminare se non il caso in cui l' incognita sia affetta da un divisore. Ma questo caso rientra nel precedente , da poichè in tal circostanza il coefficiente da cui bisogna bilerar l'incognita è una quantità frazionaria , per la quale basterà applicare la regola generalmente data pei coefficienti. In fatti sia $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, si avrà primeramente $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{7} - \frac{4x}{5} = 12 - 4$. Or trovandosi l' incognita x affetta dai coefficienti $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{5}$, per le regole date intorno al calcolo delle frazioni , queste possonsi ridurre allo stesso

denominatore senza cangiar di valore, il che fatto, dette frazioni si riducono alle seguenti $\frac{70}{105}$, $\frac{75}{105}$, $\frac{84}{105}$, e quindi la precedente equazione diventa $\frac{70x}{105}+\frac{75x}{105}-\frac{84x}{105}=8$, ed eseguendo le operazioni indicate dai termini del primo membro, vale a dire riducendo i coefficienti $\frac{70}{105}+\frac{75}{105}-\frac{84}{105}$, essi danno $\frac{61}{105}$, e quindi l'equazione proposta diventa $\frac{61}{105}x=8$; ove l'incognita x trovasi affetta dal coefficiente frazionario $\frac{61}{105}$, ed applicando la regola di coefficienti, non rimane che dividere 8 per $\frac{61}{105}$, operazione che si esegue, giusta il dettato nella lezione IX. con moltiplicare 8 pel 105 e dividere il prodotto per 61; vale a dire sarà

$$x=\frac{105.\ 8}{61}=13+\frac{47}{61}.$$

LEZIONE XVI.

Premesse tali cose, ripigliamo il nostro oggetto, e primieramente è da conoscersi, che la proporzione puol'essere *discreta*, o *continua*. Si avrà la prima quando i quattro termini, che la compongono sono tutti diversi fra loro; ma se il conseguente della prima ragione è antecedente della seconda, in tal caso la proporzione si chiamerà continuata, ed il termine comune alle due ragioni eguali si dirà *medio proporzionale*.

Teorema 1°.

» In ogni proporzione il prodotto dei termini estremi
» pareggia quello dei termini medj ».

Dimostrazione. Sia $A : B = C : D$; prendendo le quantità di tali ragioni si ha $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; se si moltiplicano ambo tali termini eguali per $B.\ D$, si avrà

$$\frac{A.\ B\ D}{B} = \frac{C.\ B.\ D}{D},$$ e poichè $\frac{B}{B} = 1$ come pure $\frac{D}{D} = 1$, così sarà $A.\ D = C.\ B$, come si è di sopra annunziato.

N. B. La verità suddetta applicata alle proporzioni continue, qual sarebbe.

$$A : B = B : C$$ ci dà
$$A.\ C = B^2$$

e quindi

» *In ogni proporzione continua il prodotto dei termini e-*
» *stremi è eguale al quadrato del termine medio* ».

PROBLEMA 14°.

Dati tre termini di una proporzione conoscersi il valore del quarto.

Nella proporzione $A : B = C : D$, siano dati A, B, C si voglia conoscere D.

Operazione. Si moltiplichi il secondo pel terzo termine, ed il prodotto si divida pel primo.

Dimostrazione. Prendansi le quantità delle date ragioni e si avranno le due $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ espressioni frazionarie che ridotte ad avere lo stesso denominatore, diventeranno $\frac{A.\ D}{B.\ D} = \frac{C.\ B}{B.\ D}$, e poichè $B.\ D = B.\ D$, sarà in conseguenza $A.\ D = C.\ B$. Dividansi ora tali due quantità eguali per A, ne risulterà

$$D = \frac{C.\ B}{A}.$$

Dunque è vero che D, *quarto termine di una proporzione è eguale al secondo moltiplicato pel terzo, e diviso pel primo.*

N. B. Avendo riguardo a' quattro termini, che compongono una proporzione qualunque

$$A : B = C : D$$

si possono con essi ottenere quattro combinazioni come siegue.

1. *Invertendo* $B : A = D : C$.
2. *Permutando* $A : C = B : D$.
3. *Componendo* $A + B : B = C + D : D$.
4. *Dividendo* $A - B : B = C - D : D$.

Intorno a tali combinazioni è da conoscersi il seguente

Teorema 2°.

In ogni proporzione *invertendo*, *permutando*, *componen-*

do, o *dividendo* i termini, essi restano sempre proporzionali.

Andiamo a dimostrare una per una tali proposizioni. Assumendo sempre $A : B = C : D$, sarà $A.\ D = B.\ C$, o dividendo tali quantità eguali per A, sarà

$$D = \frac{B.\ C}{A}$$

e divisi ambo questi termini per C, avrassi

$$\frac{D}{C} = \frac{B}{A}$$

ed in conseguenza $B : A = D : C$, dunque è vero, che

» *Se quattro termini sono proporzionali, invertendoli ri-*
» *marrano benanche proporzionali* ».

Prendansi in oltre gli esponenti delle ragioni, che compongono la proporzione primitiva, sarà

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

e moltiplicando il numeratore, ed il denominatore del primo esponente per C, si avrà

$$\frac{A.\ C}{B.\ C} = \frac{C}{D}$$

e moltiplicando per B il numeratore, e denominatore del secondo, si avrà

$$\frac{A.\ C}{B.\ C} = \frac{C.\ B}{D.\ B}.$$

Or se ambo i membri di questa equazione si dividono per $\frac{C}{B}$ ne risulterà $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$, ed in conseguenza sarà $A : C = B : D$; è vero dunque, che

» *Quattro grandezze proporzionali permutandole rimarran-*
» *no proporzionali* (1) ».

Riprendasi l' equazione $A.\ D = B.\ C$, stabilita nel 1°. teorema, e si dividano ambo i membri per D, sarà $A = \frac{B.\ C}{D}$. Se queste due quantità eguali si accrescono ognuna di B, sarà $A + B = \frac{B.\ C}{D} + B$, e moltiplicando ambo i membri per D, sarà

$$(A + B)\ D = B.\ C + B.\ D,$$

ossia

$$(A + B)\ D = (C + D).\ B$$

e spiegandone la proporzione, sarà

$$A + B : B = C + D : D$$

d' onde rilevasi che

» *Componendo i quattro termini di una proporzione essi*
» *rimangono proporzionali* ».

Se nell' equazione precedente $A = \frac{B.\ C}{D}$ si toglie da ambi i membri la quantità B, invece di aggiungerla, come si è praticato, seguendo lo stesso metodo di calcolo, si avrà

$$A - B : B = C - D : D,$$

e con ciò finalmente rimane pure dimostrato, che

» *Dividendo i quattro termini di una proporzione, essi*
» *rimangono proporzionali* ».

(1) Qui è da osservarsi, che essendosi definito il rapporto geometrico essere quello, che si stabilisce, circa la loro continenza, fra grandezze omogenee, nel caso, in cui i quattro termini della data proporzione non siano tutti della stessa natura, le ragioni permutate di $A : C$, e $B : D$ non sussisteranno, meno che considerandoli come numeri astratti, i quali sotto questo aspetto riescono tutti omogenei.

Teorema 3°.

Se si hanno più ragioni uguali, come $A : B$, $C : D$, $G : F$, dico che la somma di tutti gli antecedenti stà a quella dei conseguenti, come un antecedente al proprio conseguente; ossia sarà

$$A + C + G : B + D + F = A : B.$$

Dimostrazione. Poichè le dette ragioni si suppongono eguali, si ha $A : B = C : D$, e quindi, pel detto nella Lezione XVI^a $A.\ D = B.\ C.$

Similmente essendo $A : B = G : F$, sarà pure $A.\ F = B.\ G.$

Or assumendo la proporzione, enunciata nel presente teorema, $A + C + G : B + D + F = A : B$, se si prende di essa il prodotto de'termini estremi, e quello de' medî, si avrà $A.\ B + C.\ B + G.\ B = B.\ A + D.\ A + F.\ A$; ed in conseguenza, se si proverà sussistere una tale uguaglianza, il teorema rimarrà dimostrato. Or, essendosi di sopra trovato, che $A.\ D = B.\ C$, e che $A.\ F = G.\ B$, sostituendo tali valori, di $A.\ D$, e di $A.\ F$, nel secondo de' mentovati prodotti, si ha

$$A.\ B + C.\ B + B.\ G = B.\ A + B.\ C +.\ B.\ G.$$

quali due termini sono evidentemente eguali, e quindi eguali pure i sopraccennati prodotti, onde il teorema rimane dimostrato.

Teorema 4°.

Due frazioni che hanno lo stesso numeratore sono fra loro nella ragione inversa de' rispettivi denominatori.

Due frazioni, che hanno lo stesso denominatore sono fra loro nella ragion diretta de' rispettivi numeratori.

Dimostrazione. Siano in primo luogo le due frazioni $\frac{A}{C}$, e $\frac{A}{D}$. Dividendo la prima per la seconda frazione, sarà

$$\frac{A}{C} : \frac{A}{D} = \frac{A\ D}{A\ C} = \frac{D}{C}$$

e passando alla proporzione che ne deriva sarà

$\frac{A}{C} : \frac{A}{D} = D : C$, come si è di sopra enunciato.

Sieno poi le frazioni dello stesso denominatore $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$: dividendo la prima per la seconda frazione sarà

$$\frac{A}{C} : \frac{B}{C} = \frac{A\ C}{B\ C} = \frac{A}{B}$$

E spiegandone la proporzione, si ha

$\frac{A}{C} : \frac{B}{C} = A : B$, come si è di sopra enunciato.

LEZIONE XVII.

DELLA FORMAZIONE DE' QUADRATI

Il prodotto di un numero moltiplicato più volte di seguito per esso medesimo, si dice generalmente *potenza*. Ma se il numero si moltiplica una volta per sè medesimo, ciò che risulta si chiama il *quadrato* di esso numero; se poi si moltiplica per sè stesso due volte di seguito, ciò che risulta si chima il *cubo* di esso numero. Le altre potenze si sogliono disegnare dal numero de' fattori uguali che si sono moltiplicati tra loro; dicendosi *potenza quarta* il prodotto di quattro fattori eguali; *potenza quinta*, il prodotto di cinque fattori eguali ecc. Il modo di accennare tali potenze si è scrivendo al vertice della quantità, di cui si vuole la data potenza, il numero 2 se il quadrato, il 3 se il cubo, e così di seguito: così a^2 è il quadrato di a, a^3 il suo cubo, ecc.

Noi ci limiteremo in queste lezioni a dare il metodo di innalzare un numero a quadrato, potendosi rimettere all' Algebra la formazione delle potenze superiori.

Siccome per innalzare speditamente a quadrato un numero composto fa d' uopo che si sappiano a memoria i quadrati dei numeri semplici, eccoli qui espressi, ove si trova ciascun quadrato segnato sotto il numero, cui appartiene.

Numeri	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Quadrati	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Se bisognerà fare il quadrato di un numero terminato da zeri, di 300, per esempio; converrebbe moltiplicare 300 per 300, lo che fatto all' ordinaria maniera, ci dà lo stesso, che moltiplicando 3 per 3, ed aggiungendo al prodotto 9 quattro zeri, cioè il doppio di

quelli che ne ha 300, dimodochè il richiesto quadrato sarebbe 90000. Quindi si può generalmente inferire, che quando un numero è terminato da zeri, se ne otterrà il quadrato facendo solamente il quadrato delle cifre significative, ed aggiungendo alla destra due volte tanti zeri quanti ne ha il numero che si vuole elevare a quadrato. Per lo che se a 169, che è il quadrato di 13, si aggiungono sei zeri sulla dritta, si avrà 169000000 pel quadrato di 13000.

Inoltre essendo il quadrato di un numero, per esempio di 7, uguale a 7 ripetuto 7 volte, se intendasi 7 diviso nelle parti 4 e 3, il quadrato di 7 sarà lo stesso che la somma de' prodotti di 4 per 7, e di 3 per 7: ma il prodotto di 4 per 7 equivale alla somma dei prodotti di 4 per 4, e di 4 per 3; ed il prodotto di 3 per 7 equivale alla somma de' prodotti di 4 per 3, e di 3 per 3: dunque il quadrato di 7 pareggerà la somma de' seguenti prodotti:

4 per 4, 4 per 3, 4 per 3, 3 per 3.

Dove chiaramente si vede che i prodotti estremi sono i rispettivi quadrati di 4 e di 3, ed i prodotti di mezzo fanno il doppio del prodotto di 4 per 3. Laonde *il quadrato di un numero qualunque diviso in due parti si compone dai quadrati delle parti, accresciuti del doppio del prodotto di esse parti.*

Collo stesso raziocinio se si dovesse fare il quadrato di 34, sarebbe lo stesso, che far quello di 30 + 4, e che si otterrebbe mercè la precedente regola nel seguente modo:

$$\begin{array}{rr} & 30.30 = 900 \\ & 30.\ 4 = 120 \\ & 30.\ 4 = 120 \\ & 4.\ 4 = \underline{\ \ 16} \\ \text{quadrato} & 1156 \end{array}$$

Or esaminando il quadrato del 7 essere stato 49; quello di 34 il numero 1156, si fa chiaro, che *le cifre componenti il quadrato possonsi dividere in classi a due a due a cominciare dalla destra che saranno tante, quanto è il numero di caratteri della radice.*

Per fare il quadrato di una frazione converrebbe moltiplicare la frazione per se stessa; ma il prodotto di due frazioni si ottiene moltiplicando il numeratore pel numeratore ed il denominatore pel denominatore; dunque per avere il quadrato di una frazione bisogna fare separatamente il quadrato del numeratore, e quello del denominatore, quindi il quadrato di $\frac{3}{4}$ sarà $\frac{9}{16}$, e quello di $\frac{13}{18}$ sarà $\frac{169}{324}$.

Se bisognasse innalzare a quadrato un intero unito a frazione, si ridurrà prima l' intero colla frazione ad una sola frazione, indi si farà separatamente il quadrato sì del numeratore che del denominatore. Quindi il quadrato di $7\frac{2}{5}$ sarà lo stesso che il quadrato di $\frac{37}{5}$; esso sarà $\frac{1369}{25}$.

Finalmente per elevare a quadrato un numero che contenga interi e decimali, o solamente decimali, è chiaro, per la moltiplicazione de' decimali, che convien fare il quadrato di esso numero, come se tutte le cifre esprimessero unità intere, indi separare verso la dritta del quadrato tante caselle, per decimali, quante sono le cifre decimali contenute nel numero proposto. Così il quadrato di 478 essendo 228484, quello di 4,78 sarà 22,8484: parimente, il quadrato di 2483 essendo 6165289, quello di 2,483 sarà 6,165289.

LEZIONE XVIII.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA

Siccome il prodotto che si ottiene dal moltiplicare più volte di seguito un numero per se medesimo, si chiama generalmente potenza di questo numero: così il numero per rispetto alla potenza si dirà *radice*. E si dirà *radice quadrata*, se la potenza a cui si rapporta il numero è un quadrato. Così 3 sarà la radice quadrata di 9; sarà 5 la radice quadrata di 25, e 7 sarà la radice quadrata di 49.

Si accenna l'estrazione della radice di un dato ordine di una qual siasi quantità sottoponendola al segno $\sqrt{}$; così $\sqrt{a}$ indica che dalla quantità a si vuole estrarre la radice quadrata: per le radici degli altri ordini si scrive al vertice del segno $\sqrt{}$ il numero corrispondente all'ordine voluto: così $\sqrt[3]{a}$ indica che dalla quantità a debba estrarsi la radice cuba.

Ognun vede che qualsiasi numero si può inalzare a quadrato, ma non si può da qualunque numero estrarre la radice quadrata.

Così la radice quadrata di 9 è 3; quella di 16 è 4; ma dai numeri che son compresi tra 9 e 16, non si potrà estrarre esattamente la radice quadrata perchè dessa deve essere un numero maggiore di 3, e minore di 4. In tal caso si ricorra al numero quadrato prossimamente minore del numero da cui si vuole estrarre la radice; la quale si approssimerà alla vera coll'ajuto dei decimali. Non potendosi, per esempio, estrarre la radice quadrata di 22, si prenderà la radice di 16, la quale è 4; indi si cercherà per mezzo de'decimali di approssimarla alla vera.

Premesse tali cose, passiamo a risolvere il seguente

PROBLEMA 15°.

Estrarre la radice quadrata da un numero espresso da quante cifre si vogliono. Per esempio, un tal numero sia 56169.

Operazione. Il dato numero si divida in caselle di due cifre da destra a sinistra come qui si vede, Lez. preced.

	5 , 61 , 69. 4	237
4	16 5 29	
46	32 6 5 61 69	
	0 00 00	

Perciocchè nella prima casella a sinistra, la quale nel presente caso ha la sola cifra 5, si contiene la prima cifra della radice, noi otterremo questa cifra estraendo la radice quadrata da 5: essa è 2, che metteremo in primo posto alla dritta del numero da cui si vuole estrarre la radice. Togliamo dalla prima casella 5 il quadrato della cifra 2, cioè 4: e alla dritta del resto 1 abbassiamo 6, che è la prima cifra a sinistra della casella 61. Siccome in 16 si contiene il doppio del prodotto di 2 per la seconda cifra della radice, così per ottenere questa seconda cifra bisogna dividere 16 pel doppio di 2 ossia per 4; il qual numero si è scritto qual primo divisore alla sinistra di 16. Or il quoto della divisione di 16 per 4 è 4; che dovremmo scrivere dopo il 2 per seconda cifra della radice che si cerca. Ma il quadrato di 24, essendo 576, non si può sottrarre dal numero che si contiene nella prima delle due caselle a sinistra: on-

de converrà scrivere 3 per seconda cifra della radice. Togliamo dalle due prime caselle a sinistra, cioè da 561 il quadrato di 23, che è 529; e alla dritta del residuo 32 abbassiamo la cifra 6, che è la prima a sinistra della terza ed ultima casella. E perchè in 326 si contiene il doppio del prodotto di 23 per la terza cifra della radice, otterremo questa terza cifra dividendo 326 pel doppio di 23, vale a dire per 46: il quoto è 7 che scriveremo dopo 3 per terza cifra della radice dimandata. Finalmente sottraendo il quadrato di 237, che è 56169 dal numero contenuto nelle tre caselle 5, 61, 69, resta 0: sicchè la radice esatta di 56169 è 273. Quindi 56169 è un quadrato perfetto.

Dimostrazione. La ragione di tutto ciò è chiara per ciò che si è detto nella precedente lezione.

Coroll. Si può conchiudere dalla maniera con cui si forma il quadrato di una frazione, che la radice di una frazione si ottiene estraendola separatamente sì dal numeratore che dal denominatore.

Così la radice di $\frac{25}{49}$ sarà $\frac{5}{7}$; quella di $\frac{16}{81}$ sarà $\frac{4}{9}$.

Qualora vogliasi enstrarre la radice quadrata da un numero che contenga decimali, bisognerà dividere gl' interi in caselle da destra a sinistra, e i decimali da sinistra a destra, acciocchè, se le cifre decimali sieno in numero dispari, si possa aggiungere alla loro dritta un zero onde completare la casella; nel qual caso il denominator decimale essendo 100, 10000, 1000000, ecc. esso sarà sempre un quadrato perfetto. Ciò fatto si estrarrà la radice, come se tutte le cifre rappresentassero unità intere, indi verso la dritta della radice si separeranno tante cifre quante sono le caselle decimali.

Così dovendo estrarsi la radice quadrata da 2837, 6929, la si estrarrà da 28376929 la quale è 5327; e separando a dritta due cifre decimali, sarà 53,27 la radice cercata.

Similmente dovendosi estrarre la radice quadrata da 342, 687 ; si aggiungerà prima uno zero a destra, indi si estrarrà la radice da 3426870. La radice di questo numero è 1851 , non però esatta , poichè vi ha 669 di resto : e separando verso la dritta due cifre decimali , la radice prossima del numero 342, 687 è 18, 51.

Avendo trovato la radice di 342 , 687 non essere esatta , a cagion del resto 669 , noi potremo approssimarla alla vera fino ad una quantità minore di $\frac{1}{1000}$, di $\frac{1}{10000}$, di $\frac{1}{100000}$, ec. aggiungnendo cioè alla destra del numero, per ogni approssimazione, una coppia di zeri , e proseguendo l' operazione come di sopra si è insegnato.

Della medesima maniera si potrà rendere così prossima alla vera che si vorrà , la radice di un numero intero. Sia per esempio da approssimarsi sino alle parti millesime la radice di 14. Si aggiungano alle destra di 14 tre coppie di zeri , e si faccia l' operazione come qui si vede.

	14. 00 , 00 , 00	3, 741
	9	
67	5 0.0	
7	4 69	
744	51 0.0	
4	29 76	
7481	1 2 40.0	
1	7 48 1	
	4 91 9.	

Adunque la radice quadrata di 14 è prossimamente 3 , 741 ; e si potrebbe anche più approssimare con aggiugnere a dritta altre coppie di zeri.

Abbiamo detto che la radice della frazione si ottiene estraendo la radice quadrata tanto dal numeratore quanto dal denominatore: or se mai dai due termini della frazione, ovvero da uno de' due non si potrà estrarre la radice quadrata, si volgerà la frazione in decimali, giusta il prob: 13°., indi si estrarrà la radice nel modo qui sopra insegnato. Vogliasi, in grazia di esempio, estrarre la radice quadrata da $\frac{2}{7}$. Siccome questa frazione ridotta in decimali è uguale prossimamente a 0, 285714, e la radice di 0,285714 è 0,534, non però esatta; così la radice prossima di $\frac{2}{7}$ si dirà essere 0,534.

LEZIONE XIX.

APPLICAZIONE DELLE PRECEDENTI TEORICHE ALLA SOLUZIONE DE' PROBLEMI

Il principale uso, al quale è destinata la teorica delle proporzioni geometriche, è quello della soluzione delle diverse quistioni di Aritmetica. Infatti quante diverse proporzioni si sono antecedentemente considerate, tante specie di problemi si risolvono coll' ajuto di esse.

1. Colla proporzione semplice diretta si ottiene la soluzione di quei problemi, che appartengono alla regola detta *del tre diretta*.

2. Con la proporzione semplice inversa si risolvono quelli della regola *del tre inversa*.

3. Applicando la ragione composta da più ragioni semplici dirette, si perviene alla soluzione dei problemi chiamati della regola *del tre composta diretta*.

4. E se le componenti di una ragione composta contengono rapporti uno inverso dell' altro, tali proporzioni ci porteranno al risultato dei problemi, che diconsi appartenere alla regola *del tre composta inversa*.

5. Applicando i pochi cenni sull'equazione, dati nella lez. XV. scioglieremo talune quistioni, che diconsi appartenere al primo grado.

6. E finalmente coll'applicazione opportuna di tutte le precedenti nozioni daremo il modo di risolvere que' problemi, che riguardano la miscela di più quantità della stessa specie, detta regola di *alligazione*, e quelli di *società*.

Generalmente parlando tutto lo studio, da praticarsi nella soluzione de' problemi, consiste particolarmente a saper stabilire i rapporti, o le proporzioni, derivanti dai dati della quistione, fissandone con precisione le relazioni

fra la quantità ignota con le note; Quindi meneggiandosi opportunamente le regole, finora esposte, si arriverà alla conoscenza del valore della quantità incognita, che per convenio si esprimerà sempre con una delle lettere *X*, *Y*, *Z*.

Tutto ciò verrà con più chiarezza spiegato in trattarsi ciascuna delle accennate classi di problemi.

REGOLA DEL TRE SEMPLICE-DIRETTA

La regola del tre semplice-diretta scioglie tutte quelle quistioni, che dipendono da una proporzione che ha le due ragioni dirette fra loro, e della quale solo tre termini sono cogniti. Quindi, ricavate dai dati del problema le grandezze note, e dinotando con una delle convenute lettere quella, della quale si cerca il valore, si passerà a stabilire la proporzione, che menerà alla soluzione del problema.

Intanto perchè il rapporto non può farsi, che fra grandezze omogenee, così dei tre termini noti, due devono essere indispensabilmente della medesima specie, ed il terzo di quella dell' ignoto.

Esempio. Per la sussistenza di cento travagliatori si sono spesi in due mesi ducati mille; se gli operaj fussero stati 74, quanto sarebbe importato il loro mantenimento pel tempo medesimo?

Dalla esposizione del quesito si vede, che essendo cogniti i due numeri di operai, cioè 100, e 74, non che la spesa portata per i primi in ducati 1000; non resta a conoscersi, che la spesa, che porterebbesi pei secondi. Il numero poi, che rappresenta il tempo, perchè comune ad ambi i numeri degli Operaj non si terrà in alcun conto.

Quindi dinotando con X la quantità, di cui si va in cerca, si avranno i quattro termini seguenti.

Numero de' primi Operaj	100
Numero dei secondi	74
Mantenimento pe' primi duc	1000
Idem pe' secondi	X

Qui si osserva, che siccome per un maggior numero di operaj fa d'uopo portare una spesa maggiore per la sussistenza di essi, così dee diminuirsi un tale esito qualora il numero degli operaj è minore, e perciò si ha che il rapporto fra i due numeri di travagliatori è direttamente come quello delle spese, e quindi $100 : 74 = 1000 : X$, ed applicando la regola data per invenire il valore del quarto termine proporzionale sarà (Probl. 14°)

$$X = \frac{74.1000}{100} = \frac{74000}{100} = \frac{740}{1} = 740 \text{ ducati.}$$

REGOLA DEL TRE SEMPLICE-INVERSA

Questa regola si distingue dalla precedente sol perche de' due rapporti che costituiscono la proporzione, uno è inverso dell' altro, ond' è che fissati tali rapporti, non rimane che mutare in diretta la inversa ragione colle regole date nella XIV. Lezione, e qnindi risolvere il problema nel modo medesimo di quello usato nella precedente regola. Eccone un' esempio. In una piazza assediata si hanno i viveri per un mese, dando a ciascuno individuo la razione di 31 once al giorno. Volendo che tali viveri bastino per 37 giorni, a che devesi ridurre la razione giornaliera?

Da' dati del problema è chiaro che il numero delle once di ciascuna razione deve diminuire col crescere il numero de' giorni, pe' quali bastar devono le proviste; vale a dire la ragione delle once delle razioni è inversa di quella del numero de' giorni, pe' quali bastar devono; onde sarà la ragione di $31 : X$ inversamente di quella di $30 : 37$, e rendendo tali ragioni dirette, sarà

$$x : 31 = 30 : 37, \text{ e quindi } x = \frac{31 \cdot 30}{37} = 25^{\text{once}} + \frac{5}{7}.$$

LEZIONE XX.

REGOLA DEL TRE COMPOSTA DIRETTA

Quando le quistioni offrono più specie di condizioni, e tali, che il rapporto tra la quantità ignota, e quella della sua stessa specie dipende dalla combinazione di esse condizioni, in tal caso, la soluzione del problema dipende da una proporzione che si dirà composta di più semplici

Esempio. 500 ducati hanno fruttato in sei anni 240 ducati; quanti ne produrrebbero 300 alla medesima ragione de' primi, per lo spazio di sette mesi?

È da osservarsi, che l' utile, di cui si va in cerca, dipende dalla diversità delle somme impiegate, e dal vario tempo, pel quale il danaro è in commercio. E poichè si sa, che supponendo sempre l' utile alla madesima ragione, nel tempo istesso, maggior danaro impiegato dà un guadagno maggiore; come pure il medesimo danaro tenuto in commercio per maggior tempo, dà maggior utile; così si dirà essere la ragione degli utili direttamente come quella delle diverse somme impiegate, e come quella de' tempi; ciò posto, e riducendo gli anni a mesi, sarà

$$240 : x = (500 : 300)\ (72 : 7);$$

e calcolando questa ragion composta come si è detto nella fine della lez. XIV, si avrà

$$240 : x = 500 \,.\, 72 : 300 \,.\, 7,$$

ossia

$$240 \,.\, 300 \,.\, 7 = 500 \,.\, 72 \,.\, x$$

ed in ultimo

$$x = \frac{240 \,.\, 300 \,.\, 7}{500 \,.\, 72} = 14 \text{ duc.}$$

REGOLA DEL TRE COMPOSTA INVERSA

Questa regola è quasi come l'antecedente, dalla quale non differisce, che per la sola circostanza di trovarsi le componenti della ragion composta una inversa dell' altra.

In tal caso, stabilita la debita proporzione, basterà cambiare, col metodo dato nella XIV Lez:, in diretto l' inverso rapporto.

Esempio. Si sono impiegate tre ore per tirare 60 colpi con 5 cannoni; in quante ore si tirerebbero 200 colpi con 9 cannoni?

Generalmente parlando, il tempo impiegato per un qualunque numero di tiri cresce a misura, che aumenta il numero dei medesimi, impiegandosi lo stesso numero di cannoni; ma s'impiega poi minor tempo se per lo stesso numero di colpi si adopera maggior numero di cannoni: ciocchè vale, la ragione dei tempi è diretta di quella dei tiri, ed inversa di quella dei numeri dei cannoni, ossia la ragione di $3 : x$ è come la diretta di $60 : 200$, e come l'inversa di $5 : 9$; e passando dalla inversa ragione alla diretta, si otterrà

$$3 : x = (60 : 200)(9 : 5)$$

e prendendone gli esponenti, sarà

$$\frac{x}{3} = \frac{200 \cdot 5}{60 \cdot 9}$$

ed in fine

$$x = \frac{3 \cdot 200 \cdot 5}{60 \cdot 9} = \frac{300}{54} = 5 \text{ ore } \frac{5}{9}.$$

REGOLA D' ALLEGAZIONE

97. Questa regola serve a trovare il prezzo di una misura di una miscela, conoscendo il numero delle misure di ciascuna specie, che sono entrate nella sua composizione, ed il loro prezzo. Per esempio.

Si sono mescolate insieme 300 bottiglie di vino a 14*f*, 200 a 20*f*, e 150 a 26*f*, si domanda quanto costa una bottiglia di questa miscela.

OPERAZIONE.

bottiglie	300	a 14*f* danno.	210*l*
	200	a 20*f*	200
	150	a 26*f*	195
	650		605

È chiaro che 650 bottiglie costando 605*l* una bottiglia costa

$$\frac{605l}{650}=\frac{121l}{130}=\frac{2420f}{130}=\frac{242f}{13}=18f\ \frac{8}{13}$$

Eccone un' altro esempio.

Per provare un pezzo di artiglieria si sono tirati con esso 100 colpi, ed hanno dato per la portata i risultati seguenti

18 colpi han tirato	a 632 metri fanno	11376
25	a 628	15700
53	a 620	32860
4	a 460	2560
100		62496

Si chiede la portata media.

Si vede che la portata di 100 colpi di prova, avendo dato per somma 62496 metri, si valuterà la portata media di questo pezzo $\frac{62496^m}{100}=624^m, 96$, circa 625^m.

LEZIONE XXI.

REGOLA DI SOCIETÀ

Dalla conoscenza delle regole antecedenti se ne deduce un altra, detta di *società*. I problemi di questa classe non hanno altro oggetto, se non quello di dividere un dato numero in parti proporzionali ad altri numeri dati. Quindi noi ci accingeremo a sciogiiere con caratteri generali una tale quistione, dalla quale ricaveremo le formole, applicabili a tutt' i diversi casi.

Sia a una grandezza, che si vuol dividere in due parti le quali siano tra loro come $m:n$.

Chiamando x una di esse parti, sarà $a-x$ l' altra, e per conseguenza, per la condizione del problema dovrebbe essere

$$x:a-x=m:n,$$

e quindi prendendo il prodotto de' termini estremi, e quello de' medj, sarà

$$nx=am-mx,$$

ossia

$$(n+m)\,x=am,$$

ed in fine

$$x=\frac{am}{n+m}.$$

Trovato così il valore di x, ossia di una delle due parti, nelle quali a si vuol dividere, sarà facile l' invenire quello della seconda, rappresentata da $a-x$. In fatti sostituendo nella espressione $a-x$ il trovato valore di x, si avrà

$$a-\frac{am}{n+m}=\frac{an+am-am}{n+m}=\frac{an}{m+n}$$

valore dell' altra parte.

Dalla ispezione de' due valori, che indicano le parti, in cui è stata divisa la grandezza a, risulta, generalmente parlando, che

« Volendosi una grandezza dividere in parti propor-
» zionali a numeri dati, verrà ciascuna di esse rappre-
» sentata da un rotto vero, o spurio, il quale ha per
» numeratore la data grandezza moltiplicata corrispon-
» dentemente per uno dei dati numeri, e per denomi-
» natore comune ad esse parti, la somma di tutti i nu-
» meri dati ».

Esempio. Tre negozianti A, B, C hanno formato un capitale mettendo A ducati 25 di sua porzione, B ducati 60, e C ducati 120; dopo un anno si è trovato il lucro comune in ducati 80, si domanda quanto del detto lucro spetta a ciascuno?

Qui si vede, che di altro non si tratta se non di dividere il numero 80 in parti proporzionali a' numeri 25, 60 120.

Quindi per adattare la regola data si supporrà essere

$$80 = a$$
$$25 = m \text{, capitale di } A$$
$$60 = n \text{, capitale di } B$$
$$120 = r \text{, capitale di } C$$

ed in conseguenza sarà il lucro di

$$A = \frac{80 \ . \ 25}{25 + 60 + 120} = 9^{d} + \frac{31}{41}$$

$$B = \frac{80 \ . \ 60}{25 + 60 + 120} = 23^{d} + \frac{17}{41}$$

$$C = \frac{80 \ . \ 120}{25 + 60 + 120} = 46^{d} + \frac{34}{41}$$

Talora accade che ne' problemi di società si deve di-

videre un dato numero proporzionalmente non solo ai capitali messi da ciascuno a negozio, ma benanco secondo il vario tempo, in cui ciascun capitale si è tenuto in commercio. Simili quistioni si appartengono alla regola del tre composta, da poiche trattasi di dividere il numero a in parti che siano fra loro come $m : n$, e come $p : q$ chiamando m ed n i capitali, e p e q i rispettivi tempi. E ritenendo quanto si è detto precedentemente in ordine al modo di esprimere la ragion composta, si avrà che le parti in cui a debbasi dividere sono $= (m : n)\ (p : q)$; ond' è che passando dalle ragioni componenti alla composta di esse, giusta il dimostrato nella fine della lezione XIV, la questione riducesi a dividere il numero a in parti che siano $= m\,p : n\,q$.

Ed applicando le formole di sopra ottenute e si avrà, che tali parti verranno rappresentate rispettivamente dalle seguenti formole

$$\frac{a\,.\,mp}{mp+nq}\ .\ \frac{a\,.\,nq}{mp+nq}$$

vale a dire « ciascuna parte verrà espressa dal dato numero moltiplicato pel prodotto di ciascun capitale pel rispettivo tempo che si è tenuto a negozio, e diviso per la somma de' prodotti di ciascun capitale pel tempo rispettivo ». Eccone un esempio.

Tre giocatori A, B, C, hanno fatto un banco, mettendo A duc. 300, B duc. 430, e C duc: 570; però A ha ritirato il suo capitale dopo la prima ora del gioco, B se lo ha ritrato dopo l' ora terza, e C dopo l' ora quinta. In fin del gioco si è trovato la perdita di ducati 400, si chiede conoscere come dovrà ripartirsi tal perdita fra i detti tre giocatori.

Qui si vede, che tale ripartizione dev' essere fatta non solo secondo il danaro messo da ciascun giocatore, ma

benapche in proporzione del tempo che da ciascuno si è tenuto la sua porzione in banco; vale a dire la perdita esser dee ripartita secondo le ragioni seguenti cioè di (300 : 430 : 570) (1 : 3 : 5), ovvero il nnmero 400 esser deve diviso secondo i seguenti prodotti 300. 1, 430. 3, 570. 5; ed applicando la regola data di sopra, si avrà che le perdite sono come siegue

$$\text{Per } A \text{ ducati} \frac{400 \;.\; 300 \;.\; 1}{300.1 + 430.3 + 570.5} = \text{duc: } 27 : 02{,}7$$

$$\text{Per } B \text{ ducati} \frac{400 \;.\; 430 \;.\; 3}{300.1 + 430.3 + 570.5} = \text{duc: } 116 : 21{,}6$$

$$\text{Per } C \text{ ducati} \frac{400 \;.\; 570 \;.\; 5}{300.1 + 430.3 + 570.5} = \text{duc: } 256 : 75{,}6$$

Totale duc: 399 : 99,9

Somma minore della perdita avuta per un sol decimo, che si è tenuto per trascurabile.

PROBLEMI RISOLUTI COL MEZZO DELL'EQUAZIONE DI PRIMO GRADO

In queste quistioni tutto lo studio consiste in ricavare dai dati del problema l' eguaglianza di due espressioni, fra i cui termini vi sia quello, che contiene la grandezza ignota: ciò stabilito, maneggiando le regole date per isolare l' incognita, si otterrà il valore della cercata grandezza: tuttocciò si vedrà meglio nella soluzione del seguente

PROBLEMA.

Domandato il Priore di un Convento quanti Frati esistevano in esso, il Priore rispose: i Padri da Messa compongono un numero otto volte maggiore di quello dei

Novizj, ma gli uni, e gli altri uniti insieme sono 36: quanti erano i Padri da Messa, quanti i Novizj?

Poichè la somma del numero dei Padri da Messa, e di quello dei Novizj, formar deve 36; chiamando x il numero dei secondi, sarà $8\,x$ quello dei Sacerdoti, e per conseguenza

$$8\,x + x = 36 \text{ , e}$$
$$9\,x = 36 \text{ , ed in fine}$$
$$x = \frac{36}{9} = 4 \text{ novizj, ed in conseguenza i}$$

padri da messa risultano 32.

N. B. *Le regole finora esposte sono sufficienti per la soluzione di qual siasi problema di Aritmetica, rientrando in esse tutte le altre regole, che sotto diverse denominazione, e metodi si leggono in Aritmetiche diverse. E qui soggiungiamo un elenco di quistioni, onde servire di esercizio a' giovani, riserbandoci di trattare distesamente, e ad esaurimento tale materia nelle istituzioni di Algebra, che ci proponiamo di dare in prosieguo.*

ENUNCIAZIONE DI TALUNI PROBELMI PER ESERCIZIO DEI GIOVANI

1. Quanto dee rendere dopo un'anno un capitale di 1325 ducati impiegato al 5 1/3 per cento?...

Ducati $70 + \frac{2}{3}$.

2. Un uomo morendo lascia la moglie incinta, ed ordina per testamento, che se ella faccia maschio abbiasi 1/3 de' suoi beni, ed il bambino 2/3; ma se faccia femmina ella abbiasi 3/4, e la bambina un 1/4. Questa donna partorisce insieme un maschio ed una femmina: si domanda qual dee essere la parte di ciascuno erede.

Soluzione. La eredità divisa nelle parti, che siano tra loro come 1, 3, 6. Dappoichè dovendo nel caso di femmina la figlia ricevere una porzione che sia la terza parte di ciò che spetta alla madre, così dandosi al maschio $\frac{2}{3}$ dell'eredità, rimane alla madre $\frac{1}{3}$; e quindi la figlia ricever deve $\frac{1}{9}$ di eredità, essendo $\frac{1}{9}$ la terza parte di $\frac{1}{3}$: l'eredità adunque deve esser divisa secondo i numeri $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$; ovvero secondo $\frac{6}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{1}{9}$, ovvero come 6, 3, 1.

3. Si vuole distribuire una data somma di denaro ad un determinato numero di poveri; ma osservasi, che alla data somma vi mancano otto grana se si danno a ciascun povero grana 3; e ve ne superano tre grana se a ciascuno se ne danno due. Quanti sono i poveri, e quanto è il danaro?

Soluzione. Chiamando x il numero de' poveri, sarà per la prima supposizione $3x - 8$ il danaro a ciò destinato; come nella seconda posizione il danaro medesimo verrà indicato dalla espressione $2x + 3$; per la qual cosa sarà

$$3x - 8 = 2x + 3 \text{ , e quindi}$$

$x = 11$ numero de' poveri, ed in conseguenza l'espressione del danaro che si è trovata essere $3x - 8$, ovvero $2x + 3$, sarà in ambi i casi $= 25$ grana.

4 Un cane vede levarsi un lepre a 100 tese da lui distante, e comincia ad inseguirlo; la velocità del lepre è tale che percorre 2 tese, mentre il cane ne percorre tre; a quale distanza il cane raggiungerà il lepre?

Soluzione. Chiamando x il camino che fa il lepre pria di esser preso dal cane, sarà il camino del cane fino a

che raggiunge il lepre $= 100 + x$; e perche si è definito nel problema che il camino del cane sta a quello del lepre, come 3 : 2, perciò sarà

$$100 + x : x = 3 : 2 \text{, e quindi}$$
$$x = \frac{200}{1} = 200 \text{ tese.}$$

5. Un padre parlando con suo figlio dell'età di ciascuno, disse, ah! figlio mio, io son molto vecchio rispetto a te, giacchè ho il triplo dell'età tua: il figlio per addolcire la pena di suo padre risposegli, non vi angustiate di ciò, padre mio, giacchè da qui a 20 anni voi avrete solamente il doppio dell' età mia; si chiede qual' era l' età del padre, e quella del figlio all' epoca del loro ragionamento.

Soluzione. Chiamasi x l' età del figlio, sarà $3x$ quella del padre, e per le condizioni del problema, sarà $3x+20= 2 (x + 20)$ e quindi risulta
$x = 20$, età del figlio, e 60 quella del padre.

6. Un mercante ha due specie di the; la prima di 14 franchi il chilogrammo, e la seconda del valore di 18 franchi. Egli deve di tali specie di the formare una cassa di 100 chilogrammi, che costi 1680 franchi, per adempiere ad una commissione ricevuta; si domanda conoscere quanto the deve prendere della prima sorte, e quanto della seconda.

Soluzione. Pei dati del problema, chiamando x la porzione che prender deve del the di 14 franchi sarà

$$14x + 18 (100 - x) = 1680 \text{, e quindi}$$

$x = 30$ chilogrammi della prima sorte; in conseguenza della seconda sorte prender ne deve 70.

7. In un' orologio in quali momenti accade l' incontro della lancetta delle ore con quella dei minuti?

Soluzione. È chiaro che tale incontro accade segnando mezzogiorno, ovvero le 12; per trovare gli altri incontri chiamasi x il tempo che percorrer deve la lancetta delle ore dopo il primo incontro per coincidere con quella dei minuti, il tempo che deve percorrere la lancetta de' minuti fino a tale incontro sarà $12x$; e perche in tal tempo la detta lancetta percorre l' intiera circonferenza delle dodici ore, più lo spazio x, perciò sarà

$$12x = 12 + x, \text{ e quindi}$$

$x = \frac{12}{11} = 1^{ora} + \frac{1}{11}$, ossia l'incontro delle due lancette accade ogni ora $+ \frac{1}{11}$ di ora, dopo quello del mezzogiorno.

FINE DELL' ARITMETICA.

GEOMETRIA

PIANA E SOLIDA

Qui neque sic capiunt, non sibi dicta putent.

LEZIONE XXII.ª (a).

IDEE GENERALI.

Definizioni. La geometria è la scienza della estensione considerata in lunghezza, larghezza, e profondità.

La considerazione della estensione, in quanto alla semplice lunghezza, ci dà l'idea della *linea:* l'estensione considerata in lunghezza, e larghezza, ci offre la *superficie;* e le tre dimensioni, cioè lunghezza, larghezza, e profondità, considerate simultaneamente, ci danno il *solido*.

L'estremo di una linea dicesi *punto;* e perchè nella linea non si considera nè la larghezza, nè la profondità, ma bensì la sola lunghezza, perciò nel punto non concorre niuna delle tre dimensioni suddette, e quindi i matematici lo definiscono come privo di lunghezza, larghezza, e profondità, benchè fisicamente tale non possa dirsi.

DELLE LINEE.

La linea dicesi *retta* quando scorre fra due punti senza menomamente inclinare, per tutta la sua lunghezza, nè a destra, nè a sinistra, come appunto si è la *ab:* puol'esser quindi la linea retta concepita come formata dal movimento diretto di un punto *a* verso l'altro *b*. (Fig. 1.)

Dalla suddetta definizione siegue, che *la linea retta segna*

(a) Il computo delle presenti lezioni fa seguito alle XXI componenti la nostra Aritmetica.

la più corta distanza fra due punti, perchè esclude qualunque menomo deviamento.

Dicesi *linea curva* quella che vien generata dal movimento di un punto che, ad ogni istante, devia dal sentiero della linea retta: tali sono le *acb*, *adb*. E poichè infinite sono le deviazioni che possono concepirsi, nello scorrere di un punto, perciò infinite sono le linee curve che possonsi tirare fra due punti, ma unica è la linea retta.

È *linea mista* quella ch'è composta, nella sua estensione, di una retta e di una curva, come appunto si è la *pxb*.

Dicesi in fine *angolosa* quella linea, che si compone di due rette, le quali fra loro non serbano la direzione medesima; tal'è *apx*, composta dalle due *ap*, *px*, messe ad angolo in *p*.

Fra le linee curve la geometria distingue principalmente la *circolare*, dessa vien descritta (Fig. 2.) dall'estremo *a* della linea retta *ac*, la quale gira intorno il punto fisso *c*. Questo punto vien detto *centro*, la linea curva rientrante *abfd* vien detta *circonferenza*, e la *ac*, come tutte le altre, che dal centro *c* si possono intendere tirate ai varj punti della circonferenza, vien detta *raggio*: dicesi poi *cerchio* lo spazio che vien racchiuso dalla circonferenza.

Siegue dalla idea data della generazione del cerchio, che tutt'i punti della linea circolare *abfd* risultano ugualmente distanti dal centro *c*, ed in conseguenza *tutt'i raggi* ca, cb, cd ec. *del cerchio sono tra loro uguali*.

Chiamasi *diametro* del cerchio ogni raggio, come *ac*, prolungato fino all'incontro della circonferenza in *f*; il diametro quindi *af* vien formato da due raggi *ac*, *cf*: e poichè sono uguali tutt'i raggi di uno stesso cerchio, uguali pure ne saranno tutt'i diametri, perchè doppj dei raggi.

Quelle linee rette poi, che si tirano nel cerchio, e che, toccando con i loro estremi la circonferenza, non passano pel centro, diconsi *corde*: tali sono *df*, *ds*.

Quelle porzioni di circonferenza, che restano tagliate dalle corde, come *df*, *ds*, diconsi *archi*; e si chiameranno *segmenti* quelle porzioni di cerchio rinchiuse fra la corda e l'arco.

In fine dicesi *settore* quello spazio circolare, che resta rinchiuso fra due raggi ed un arco, come *fcd*.

Corollario. Poste le surriferite idee intorno alle linee rette, che dal centro partono alla circonferenza del cerchio, è facile il notare che ogni diametro, come *bd*, divide il cerchio in due parti uguali: in fatti, intendendosi il mezzo cerchio *dfb* abbattuto sull'altro *dab*, con movimento intorno al diametro *db*, tutt'i punti della mezza circonferenza *dfb* combaceranno con quelli appartenenti all'altra mezza circonferenza *dab;* dappoichè, se ciò non accadesse, un punto *f*, p: e: cadrebbe al di dentro, o al di fuori della mezza circonferenza *dab*, il che porterebbe in conseguenza, che non tutt'i punti dalla circonferenza sono ugualmente distanti dal centro *c*, fatto contrario alla natura del cerchio.

Gli antichi Geometri han sempre considerata la circonferenza del cerchio divisa in 360 parti uguali, denominate *gradi;* ogni grado lo divisero in 60 *minuti primi*, ed ogni minuto primo, in 60 *minuti secondi, ecc.*

I moderni Francesi però, volendo adottare anche in ciò la divisione decimale, generalmente gradita, considerano la circonferenza del cerchio divisa in 400 gradi, ogni grado in 100 minuti primi, ogni minuto primo in 100 secondi, ec. Noi però seguiremo la divisione antica.

Nel calcolo distinguonsi i gradi con piccolo zero, posto al vertice del numero che lo esprime, i minuti primi con un accento al vertice della corrispondente cifra, ed i secondi con due accenti, ec:; di modo che la espressione di un arco di 35 gradi, 12 minuti primi, e 30 secondi, si scriverà 35°: $12'$: $30''$.

Definizioni. I cerchi si dicono *concentrici*, quando hanno lo stesso centro, come (Fig. 3.) *ad*, *fg*: si dicono *eccentrici* quelli che hanno diversi centri, come (Fig. 4.) *op*, *ona*.

Quelle linee rette che partendo da un punto preso fuori dalla circonferenza, l'attraversano, tagliandola in due punti, si dicono *secanti;* e si diranno *tangenti* quelle linee rette, che partendo come le secanti, da un punto, preso fuori la cir-

conferenza, non la toccano che in un punto solo, come *ab*.

Diconsi *linee perpendicolari* quelle che, cadendo su di un'altra linea, non s'inclinano nè da un lato, nè dall'altro, tal'è (Fig. 6.) *hx* rispetto ad *ab*: è quindi chiaro che, siccome la *hx* non inclina nè verso l'estremo *a*, nè verso l'altro *b* della retta *ab*, così pure *ab* non inclinerà nè verso l'estremo *h*, nè verso *x* della retta *hx*; e da ciò siegue, che, *se una linea retta è perpendicolare ad un'altra, sarà pure questa perpendicolare alla prima.*

Le *linee oblique* sono quelle che, cadendo su di un'altra, inclinano più da un canto, che dall'altro di essa; tal'è *hf* rispetto ad *ab*, giacchè inclina più verso l'estremo *a*, che verso *b*.

In fine sono *paralelle* quelle linee rette, che serbano fra loro, sì da un canto, che dall'altro, sempre la medesima distanza, e che prolungate all'infinito, dall'una, e dall'altra parte, esse non s'incontrano giammai. Tali sono *hp*, *mn*, ove tutti i punti *h....p* sono ugualmente distanti dagli altri *m....n*.



LEZIONE XXIII.

INCONTRO DI DUE LINEE RETTE.

Definizioni. *Angolo* è l'inclinazione di due linee, come *ac*, *dc* (Fig. 3.) le quali s'incontrano nel punto *c*; di modo *dca* è un angolo. Egli è chiaro che come il punto *d* si discosta dal punto *a*, così l'angolo *dca* e l'arco *da*, divengono più grandi; vale a dire, l'angolo *dca* s'ingrandisce a misura, che cresce l'arco *ad*.

È chiaro inoltre, che l'angolo *dca*, benchè abbia i lati *dc*, *ca*, minori dei lati *fc*, *cg*, dell'angolo *fcg*, pure tali angoli sono uguali, avendo ambi la medesima inclinazione in *c*. Vale a dire, che la grandezza di un angolo non dipende da quella dei lati, ma bensì da quella dell'arco, che separa i suoi lati, posto per centro il punto d'inclinazione: quindi è che gli archi decidendo della grandezza degli angoli che sostengono, potrà ritenersi per ciascun angolo il rispettivo arco come propria misura; ed in generale *la misura di un angolo vien' indicata dai gradi dell' arco di cerchio frapposto ne' suoi lati, e il di cui centro è nel punto d'inclinazione.*

Per indicare un angolo si adoperano tre lettere, delle quali quella di mezzo esprime sempre il punto d'inclinazione, detto *vertice*, e le altre due indicano gli estremi dei lati: spesso però gli angoli vengono indicati benanche con una sola lettera, e propriamente con quella posta nel vertice, ma ciò si usa quando non arreca alcuno equivoco; così l'angolo *dca* si puole benanche dire angolo *c*.

Se l'angolo ha i due suoi lati linee rette dicesi *rettilineo*: si dice *curvilineo* quello, che ha i suoi lati ambi linee curve; e *mistilineo* se un lato è linea retta, e l'altro linea curva. Tali sono le distinzioni degli angoli, in quanto ai lati. Ma gli angoli vengono diversamente considerati in rapporto alla loro grandezza: dicesi *retto* quell'angolo, che vien misurato da

un arco ch'è quarta parte della circonferenza del cerchio, ossia da un arco di 90°; come appunto si è l'angolo *dcp* (Fig. 7): dicesi *acuto* quello, che vien misurato da un arco minore di 90°, come lo è *dcx;* ed infine si dice *ottuso* quell'angolo ch'è misurato da un arco maggiore di 90°, come appunto si è *dca*.

Gli angoli paragonati coll'angolo retto prendono benanchè una particolare denominazione: dicesi *complemento* di un angolo quell'altro, che indica la differenza di lui dall'angolo retto: così l'angolo *dcx* dicesi complemento dell'altro *xcp*, perchè il primo varia dall'angolo retto *dcp* per l'angolo *xcp*. È poi *supplemento* di un angolo l'altro che vi manca per uguagliarlo a due angoli retti: così l'angolo *dcx* è supplemento dell'altro *bcx*, perchè presi insieme formano i due angoli retti *dcp*, *bcp*.

Corollari. Risulta da quanto abbiamo detto, *che gli angoli uguali hanno uguali i loro complementi, e supplementi: e viceversa saranno uguali quegli angoli i cui complementi, o supplementi sono uguali* (1).

Quando una linea *ac* cade su di un'altra *bd* forma due angoli, uno da un canto, e l'altro dall'altro, come *acd*, *acb*, quali vengono chiamati *contigui*. Or se, centro il punto d'incontro *c*, e raggio a piacere, si descrive il cerchio *abqd*, per le definizioni precedentemente date, *bd* sarà un diametro, e *bad* una mezza circonferenza; ed in conseguenza l'angolo *acb* vien misurato dall'arco *ab*, e l'altro contiguo *acd* ha per misura l'arco *ad:* vale a dire, i due angoli contigui *acb*, *acd*, presi insieme, hanno per misura la mezza circonferenza *bad*, ossia 180°, ch'è il valore di due angoli retti; dal che siegue il principio generale, che *i due angoli contigui, fatti dall' in-*

(1) La seconda parte di un tal principio suppone che gli angoli, che hanno uguali i complementi, siano omogenei; vale a dire, tutti due acuti, o tutti due ottusi; giacchè se tali non sono l'uguaglianza non regge. In fatti l'angolo di 100° ha per complemento 10°, differenza da 100 a 90; l'angolo di 80° ha pure per complemento 10°, giacchè 10 è benanche la differenza da 80 a 90; ed intanto l'angolo ottuso di 100° non è uguale all'acuto di 80°.

contro di una linea, che cade su di un'altra, sono insieme uguali a due angoli retti.

Similmente, considerando gli angoli *dcy*, *bcy*, benanche contigui, ma formati al di sotto della *bd*, col prolungamento di *ac* in *y*, essi sono pur misurati dalla mezza circonferenza, ossia da 180°, quindi presi insieme detti angoli valgono due angoli retti.

Or, se dal punto *c* si tirano quante linee si vogliono alla periferia, come *ca*, *cp*, *cx*, *cd*, ec., tutti gli angoli *bca*, *acp*, *pcx*, *xcd* ec., ch'esse formano, intorno al punto *c*, hanno per misura la intera circonferenza, ossiano 360°, ch'è il valore di quattro angoli retti. Vale a dire, che *tutt' i possibili angoli, che possono formare più linee, che si tagliano in un punto comune, insieme presi equivalgono a quattro angoli retti.*

TEOREMA

Se due linee, come *ay*, *bd* si tagliano nel punto *c*, gli angoli ch'esse formano, e che hanno i vertici opposti, come *acb*, *dcy* sono tra loro uguali.

Dimostrazione. Poichè l'angolo *acb* è supplemento dell'altro *bcy*, perchè contigui; ed è pure l'angolo *dcy* supplemento dello stesso *bcy*, perchè benanche contigui, risulta che i cennati angoli *acb*, *dcy*, essendo ambi supplementi dello stesso *bcy*, sono tra loro uguali.



LEZIONE XXIV.ª

LINEE RETTE PARALELLE.

Definizioni. Se due linee rette paralelle *li*, *TK* (Fig. 8.) vengono tagliate da una terza linea *fq*, gli angoli, ch'esse formano in *a*, in *b*, dalla stessa parte, diconsi *corrispondenti*. Gli angoli in *b*, ed in *c*, formati, uno da una parte, e l'altro dall'altra della secante *fa*, diconsi *alterni-interni*: quelli poi formati al di sopra delle paralelle, uno da una parte, e l'altro dall'altra della secante, come l'angolo *a*, e l'angolo *x*, chiamansi *alterni-esterni*.

Corollari. Per la natura delle paralelle, le due *li*, *TK* non possono essere una più inclinata dell'altra, sulla secante *fq*, dalla stessa parte, verso *f*; ma bensì devono essere da uno stesso canto egualmente inclinate, altrimenti, prolungate s'incontrerebbero. E poichè tale loro inclinazione dipende dagli angoli *a*, *b*, ch'esse formano dalla stessa parte colla *fq*, perciò i cennati angoli devono essere necessariamente uguali tra loro, ed in conseguenza, *di due linee rette paralelle, tagliate da una terza, gli angoli corrispondenti, dalla stessa parte, sono tra loro uguali*.

Siegue da ciò, che essendo $b=a$, perchè angoli corrispondenti dalla stessa parte; ed essendo pure $a=c$, perchè opposti al vertice, (preced. teore.), sarà in conseguenza $b=c$: ma questi sono angoli alterni interni, *dunque gli angoli alterni interni, fatti da due linee rette paralelle, tagliate da una terza, sono tra loro uguali*.

Inoltre essendosi detto, che $b=a$, ed essendo pure $b=x$, sarà $a=x$; ma tali angoli sono alterni esterni, dunque *gli angoli alterni esterni di due linee rette paralelle, tagliate da una terza, sono tra loro uguali*.

Dippiù gli angoli *a*, ed *m*, presi insieme, come contigui, uguagliano due angoli retti; ed essendo $a=b$, perchè corri-

spondenti dalla stessa parte, sarà perciò l'angolo b, e l'angolo m, insieme presi, uguali a due angoli retti: ma tali angoli sono interni, dalla stessa parte della secante; dunque gli *angoli interni, dalla stessa parte, fatti da due linee rette parallelle tagliate da una terza, sono uguali a due angoli retti.* Una tale verità vale pure per gli angoli esterni g ed a dalla stessa parte: in fatti, gli angoli contigui $g+b=180°$, ma $a=b$, dunque $g+a=180°$, come si è detto.

Or, se uno di tali angoli esterni è retto, tale pure risulta l'altro; vale a dire se a è retto, retto è pure g; ma perchè a sia retto, dev'essere li perpendicolare alla secante, in conseguenza l'altra TK dev'essere pure perpendicolare alla secante medesima: ed in generale, *di due linee rette paralelle, che vengono tagliate da una terza, se la secante è perpendicolare ad una delle paralelle, lo sarà pure all'altra, e viceversa.*

Intanto, se si tira la linea retta rM paralella ad fA, cui sia secante la Np, tirata paralella alle TK, li, nè avverrà, che essendo $rsp=bqs$, perchè angoli corrispondenti delle paralelle suddette; e $bqs=a$, perchè corrispondenti delle paralelle Np, li; sarà $rsp=a$: ma l'angolo s, ossia l'angolo rsp, ha i suoi lati rs, sp rispettivamente paralelli ai lati fa, ai dell'angolo a, dunque, *se due angoli hanno i lati rispettivamente paralelli, essi sono tra loro uguali.*

Fin qui abbiamo osservato che, posto il paralellismo di due linee rette, e queste venendo tagliate da una terza linea, gli angoli corrispondenti sono tra loro uguali, come uguali sono gli angoli alterni, interni, ed esterni, non che gl'interni dalla stessa parte della secante. Con ciò è facile il comprendere la inversa proposizione, cioè, che, posta l'uguaglianza dei citati angoli, le linee rette risultano paralelle; imperciocchè, per sussistere l'uguaglianza fra tutt'i mentovati angoli, sempre devono essere le linee ugualmente inclinate sulla comune secante, e quindi esse fra loro paralelle.

PROBLEMA

Per un dato punto *i* menare una linea retta che sia parallella alla *TK*.

Operazione. Si prenda il punto *i* come centro, e per raggio l'apertura di compasso a piacere, e si descriva un arco di cerchio, come *ht*: indi, centro il punto *h*, ove il descritto arco taglia la data retta *TK*, e raggio la medesima apertura del compasso, si descriva l'altro arco di cerchio *di*: indi si prenda col compasso la distanza *id*, e tal distanza si segni, a cominciar dal punto *h*, sull'arco *ht*, e si congiunga colla riga il punto *t* col punto *i*, sarà questa la dimandata linea retta paralella (1).

Dimostrazione. Poichè gli archi *ht*, *di*, sono uguali tra loro, ed appartengono a cerchi uguali, perchè fatti collo stesso raggio, uguali pure saranno gli angoli *tih*, *ihd*, perchè sono da tali archi misurati; ma detti angoli sono alterni delle due linee rette *ti*, *hd*, tagliate dalla terza *ih*, dunque le *it*, *hd* sono tra loro paralelle.

(1) Ogni operazione, che si esegue ragionatamente con la riga, e col compasso, è una operazione geometrica.

LEZIONE XXV.ª

PROBLEMA

Su di una data linea retta *ab* innalzarvi un perpendicolare (Fig. 9.).

Operazione. Con i punti *a*, e *b*, estremi della data linea retta, come centri, e per comun raggio una qualunque apertura di compasso, che sia maggiore della metà della data retta, si descrivino gli archi di cerchi *xx*, *gg*, tanto al di sopra, che al di sotto di *ab*. Si congiungano i punti *h*, e *h'*, intersezioni di detti archi, mediante la linea retta *hh'*, questa sarà perpendicolare ad *ab*.

Dimostrazione. Poichè *b* è centro degli archi di cerchio *gg*, tutt'i punti di detti archi sono ugualmente distanti da *b*. Similmente, *a* essendo centro degli archi *xx*, tutt'i punti di questi archi sono ugualmente distanti dal centro *a*. In conseguenza i punti *h*, *h'*, comuni agli archi *gg*, *xx*, risultano ugualmente distanti dai punti *a*, *b*, e quindi tutta la linea retta *hh'* sarà ugualmente distante dai punti *a*, *b*, e come tale perpendicolare alla *ab*.

Corollarj. Risulta dal precedente problema, che la *hh'*, avendo tutt'i suoi punti ugualmente distanti da *a*, e *b*, sarà pure il punto *p*, intersezione di *hh'* con *ab*, ugualmente distante da *a*, e *b*; e quindi la linea *ab* è stata divisa in due parti uguali in *p*. In conseguenza di che, volendosi dividere una data linea retta in due parti uguali, basterà menare alla medesima una perpendicolare prendendo per centri degli archi a descriversi, gli estremi della linea retta medesima, e nel punto, ove la perpendicolare incontra la data linea retta, sarà quello, ove la medesima rimane divisa in due parti uguali.

E qui si noti, *se una linea retta ha due suoi punti ugualmente distanti, da due altri punti, che appartengono ad un'al-*

tra linea retta, tali rette saranno fra loro perpendicolari. Quindi, volendosi menare, da un punto *d* della linea retta *ab*, una perpendicolare alla medesima, basterà descrivere in sulle prime, (Fig. 10.) centro il punto dato *d*, e raggio *da*, oppure *db*, una mezza circonferenza *acb;* indi, centri, *a*, *b*, e col raggio maggior della metà di detta retta, si descrivino due cerchi, questi s'intersegheranno in un punto *h;* si congiunghino poi i punti *h* e *d* colla linea retta *hd*, sarà questa la perpendicolare ad *ab*, innalzata al punto dato *d*. In fatti, tanto il punto *h*, che l'altro *d* della linea retta *hd* sono egualmente distanti dagli estremi *a*, e *b* della linea data *ab*, ed in conseguenza gli è perpendicolare.

Che se poi la perpendicolare si vorrà menare alla data linea retta *ab* da un punto *h*, preso fuori di essa, basterà pria descrivere col centro *h*, un arco di cerchio *cc*, (Fig. 11.), quale incontri la *ab* ne'punti *c*, *c*: indi, con i centri, *c*, *c*, si descrivino due cerchi, quali s'incontrino in un punto *p;* congiunto *p* col dato punto *h*, mediante la linea retta *hp*, sarà questa la perpendicolare cercata. In fatti, tanto il punto *h*, che l'altro *p*, di detta linea, essendo ugualmente distanti da' punti *c*, *c*, della *ab*, sarà *hp* perpendicolare ad *ab*.

TEOREMA

Da un punto qualunque *p* (Fig. 6.) preso su la *ab*, o dall'altro qualunque *h*, preso al di fuori di detta linea, non si può tirare, che una sola perpendicolare *hp* alla medesima.

Dimostrazione. Suppongasi che dal punto *p* si possa tirare ad *ab* una seconda perpendicolare, e sia *pc;* questa, avendo il punto *p* comune colla perpendicolare *hp*, e trovandosi interposta fra essa perpendicolare, e la linea retta *ab*, sarà più inclinata verso un canto che verso l'altro di *ab*, e quindi non potrà essere all'*ab* perpendicolare.

Suppongansi poi, che dal punto *h*, preso fuori di *ab*, possa alla medesima abbassarsi la perpendicolare *hd*, oltre dell'altra, già tirata *hp:* in questo caso la linea *hd*, trovandosi frap-

posta fra la perpendicolare *hp*, e la linea *pa*, avendo il punto *h* di comune con la *ph*, sarà inclinata più verso un canto, che verso l'altro di *ab*, e perciò a questa non potrà essere perpendicolare. Rimane quindi fermo l'enunciato teorema.

Segue dal già detto, che, *se due linee rette sono perpendicolari ad una medesima linea, esse rette saranno paralelle:* imperocchè, se dette due linee rette non fossero paralelle, ma se riunissero in un punto, ne avverrebbe che da un medesimo punto si possono tirare due perpendicolari ad una linea retta, il che si è trovato essere impossibile.



LEZIONE XXVI.ª

TEOREMA

La perpendicolare hp è sempre la più corta di tutte le altre linee, che da un punto h si possono tirare sull' AB come hd.

Dimostrazione. In fatti prolungata la hp in x, finchè sia $hp=px$; e congiunta la dx; si avrà, che facendo girar la figura dhp intorno ad ab, in modo, che ph si distende sopra della sua uguale px, anche la hd si distenderà su la dx, a causa che hx, e db essendo fra loro perpendicolari il punto d dev'essere equidistante da h, e x, vale a dire sarà $hd=dx$; ora è la linea angolosa $hdx>hx$, (Lez. XXII.ª definiz.) ed essendo $hd=dx$, come $hp=px$, sarà ciascun metà $hd>ph$, e potendosi ciò dire di ogni altra linea diversa dalla hp, risulta che la perpendicolare hp è la più corta di tutte le altre linee, che da h si tirano sulla ab.

Corollari. Delle due linee angolose hax, hdx, la prima allontanandosi più della seconda dalla perpendicolare hpx, sarà $hax>hdx$, e quindì ha metà della prima sarà maggiore di hd metà della seconda; vale a dire *di tutte le oblique che si possono tirare da un punto su di una retta, quelle, che più si allontanano dalla perpendicolare, sono maggiori di quelle che più se ne avvicinano.*

Risulta pure che se due oblique come hd, hf si allontanano ugualmente dalla perpendicolare, una da una parte, e l'altra dall'altra, tali linee riescono uguali; e poichè non si possono menare, che solo due linee rette, una da un canto, e l'altra dall'altro, che siano ugualmente distanti dalla perpendicolare, perciò *da un punto non si possono tirare su di una linea retta, che sole due linee uguali.*

Inversamente se le hd, hf, menate una da una parte e l'altra dall'altra della perpendicolare, sono uguali, esse si allontaneranno ugualmente dalla perpendicolare medesima,

vale a dire, sarà $pd=pf$: questo allontanamento dicesi *deviamento dal perpendicolo.*

Or (Fig. 12) se dal centro *c* del cerchio *afd* si tira la linea retta *ca* sulla tangente *ga* al punto di contatto *a*, la medesima risulterà la più corta; dapoichè tutte le altre, che dal centro stesso si possono tirare sulla tangente, oltrepasseranno la periferia del cerchio, e quindi saranno sempre maggiori della *ca*, ed in conseguenza, pel teorema precedente *il raggio* ac, *tirato al punto di contatto della tangente* ga, *risulta sempre alla medesima perpendicolare.*

Risulta quindi, che per definizione la tangente toccando la periferia in un punto, ed essendo pur perpendicolare al raggio tirato al punto medesimo, *sarà ogni linea retta, che si mena perpendicolare al raggio, all'estremo di esso, pur tangente alla periferia;* che se tale non fosse, si potrebbe sempre all'estremo medesimo tirare altra linea retta, che ne sia tangente, la quale dovendo essere perpendicolare al raggio, si vedrebbero in questo caso ad un punto medesimo menate due perpendicolari allo stesso raggio, il che è contrario al dimostrato nella precedente Lezione.

TÉOREMA

Una linea retta *cp*, tirata dal centro *c* (Fig. 13) del cerchio *fpb* al punto di contatto della tangente *gh*, divide per metà tutte le corde che si possono tirare nel cerchio stesso, paralelle alla tangente.

Dimostrazione. Poichè *cp* è perpendicolare alla tangente; tale sarà pure a tutte le corde ad essa paralelle, giusta quanto si è dimostrato nella precedente Lezione.

Inoltre la *cp* ha il punto *c* ugualmente distante da *a*, e da *d*, perchè centro del cerchio; e risultando *cp* perpendicolare alla corda *ad*, sarà il punto d'intersezione *s*, anche ugualmente distante dai punti *a*, e *d*; ossia sarà $as=sd$, ed in conseguenza la perpendicolare *cp* divide in due parti uguali la corda *ad*, paralella alla tangente.

Nello stesso modo si può dimostrare, che divide per metà tutte le altre corde *mn*,... paralelle alla medesima tangente, e con ciò rimane completamente dimostrato l'enunciato teorema.

Avvertimento. Qui si noti, che se una linea *cp* ha due suoi punti *c*, *s*, ciascuno ugualmente distante dagli estremi *a*, *d*, della corda *ad*, sarà la *cp* perpendicolare ad essa corda, (Lez. XXIV.ª *corollar.*). In conseguenza, se il punto d'intersezione *s* è ugualmente distante dagli estremi *a*, *d* della corda, ciò che vale lo stesso, la divide in due parti uguali, ed è ad essa perpendicolare, avrà perciò ogni altro suo punto ugualmente distante dagli estremi *a*, *d*: ma il centro *c* è pure ugualmente distante da due detti punti estremi, perchè appartengono alla periferia del cerchio, dunque la *cs* passa pure pel centro. Vale a dire *quella linea retta, ch'è perpendicolare ad una corda, e la divide per metà, passerà pel centro del cerchio.*

Corollario. Da quanto si è detto, deriva, che la *cs*, se passa pel vertice dell'angolo *acd*, i di cui lati *ca*, *cd* sieno uguali, e per la metà dell'altro lato *ad*, opposto al detto angolo, passerà pure per la metà dell'arco *apd*, che misura detto angolo: in fatti la *csp* risultando perpendicolare alla *ad*, ed a tutte le altre corde che si possono tirare paralelle alla *ad* nell'arco *apd*, dividerà per metà tutte queste corde. Or, se s'intende l'arco *ap*, girare intorno alla *cp* finchè si abbatte sull'altro arco *pd*, tutt'i punti *a*, *m*... coincideranno cogli altri *d*, *n*... e quindi l'arco *pa* combacerà perfettamente con l'altro *pd*, e saranno perfettamente uguali. Intanto, perchè *cp* divide l'arco *ad* in due parti uguali, dividerà anche l'angolo *acd* in due parti uguali *acp*, *pcd*, da poichè, vengono tali angoli rispettivamente misurati dà due archi uguali *ap*, *pd*.

Riunendo quindi le cose già dette, è da concludersi, che delle tre proprietà della linea retta *cp*, cioè 1.° di passare pel centro del cerchio, 2.° di essere perpendicolare alla corda, 3.° di tagliare questa in due parti uguali, se due di esse se ne avverano, la terza sarà, per conseguenza, benanche vera.

LEZIONE XXVII.

Nelle precedenti lezioni abbiamo apprese le verità più notabili intorno alle linee rette, che si possono tirare in un cerchio; noteremo nella presente lezione tutto ciò che è relativo alla circonferenza, ed alle sue parti, per completare la teorica della linea circolare.

PROBLEMA

Far passare una circonferenza di cerchio per tre dati punti, a, b, d, non posti in linea retta (Fig. 14).

Operazione. Si uniscano i dati punti con le linee rette ab, bd, e ciascuna dividasi per metà rispettivamente con le linee xx, hh, alle medesime perpendicolari: dico che il punto c, intersezione delle due perpendicolari, è il centro del cerchio, che passa per i punti a, b, d.

Dimostrazione. Poichè la linea hh è perpendicolare ad ab, ha tutti i suoi punti ugualmente lontani da a, b, come pure la xx, essendo perpendicolare alla bd, ha tutt'i suoi punti ugualmente distanti da b, d. Quindi il punto c, che appartiene tanto alla xx, che alla hh, si trova ugualmente distante dai punti a, b, d; ed in conseguenza se col centro c, e con un raggio uguale ad una delle ca, cb, cd, si descrive un cerchio, questo passerà pei tre punti dati (1).

(1) La necessità della condizione, che i dati punti non fossero in linea retta, nasce dalla considerazione, che una linea retta, comunque tirata in un cerchio, non tocca la circonferenza, che in due soli punti. Ma, oltre della detta ragione, che si mostra a primo sguardo, avvene un'altra, tutta geometrica, e si è quella, che, se i tre punti dati fossero in linea retta, la *operazione* del problema darebbe, che le due perpendicolari xx, hh, verrebbero innalzate da due punti, appartenenti ad una stessa linea retta, e quindi tali perpendicolari risulterebbero tra loro paralelle. E poichè il centro del cerchio deve trovarsi nell'incontro di tali perpendicolari, perciò, non avvenendo l'incontro di esse, nel caso de' punti in linea retta, non vi sarà centro, e quindi niun cerchio vi passerà pe' dati punti; vale a dire il problema sarebbe, in tale ipotesi, insolubile.

La soluzione del precedente problema ci dà il modo facilissimo di *trovare il centro del cerchio, cui un dato arco appartiene;* e ciò tirando nel dato arco, p. e. *abd* due corde ad angolo, e ciascuna di queste divisa in due parti uguali, non rimarrà che innalzare da'punti di divisione le linee rette rispettivamente perpendicolari ad esse corde; il punto d'incontro di tali perpendicolari sarà il centro del cerchio, cui il dato arco appartiene.

PROBLEMA

Dato un arco di cerchio, p. e. *ab*, dividerlo in due parti uguali.

Operazione. Si tiri *ab* corda dell'arco dato, e si divida in due parti uguali in *s*: dal punto *s* s'innalzi su di *ab* la perpendicolare *hh;* questa nel punto *o*, ove incontra il dato arco, lo dividerà per metà.

Dimostrazione. Poichè *hh* è una perpendicolare tirata sul punto metà della corda *ab*, essa passerà pel centro del cerchio: quindi, trovato un tal centro, giusta il precedente problema, e supposto che fosse *c*, sarà questo un punto della *hh* ugualmente distante da'punti *a*, *b*, estremi dell'arco dato. Inoltre la *hh*, essendo stata innalzata al punto *s*, che segna la metà della corda *ab*, sarà *s* un altro punto delle *hh* ugualmente distante dagli estremi *a*, *b;* ed in conseguenza ciascun punto della *hh* sarà ugualmente distante da'punti *a*, *b*, vale a dire, anche il punto *o* di detta linea retta sarà ugualmente distante dagli estremi dell'arco *a*, *b*, il che suona, che l'arco *ab* rimane diviso in due parti uguali della perpendicolare *hh* nel punto *o*, ove la incontra.

TEOREMA

Gli archi di cerchio, compresi fra una tangente, ed una corda, o fra due corde, che siano paralelle sono uguali.

Dimostrazione. Poichè la linea retta *cp*, (Fig. 13) che passa

pel centro c, e che cade sulla tangente gh al punto di contatto p, è ad essa tangente perpendicolare, tal sarà pure alle corde ad, mn, tirate paralelle alla tangente, giusta quanto si è detto nella lezione XXIV.ª Or il punto c della cp, essendo centro del cerchio, è ugualmente lontano da'punti a, d, m, n, che appartengono alla periferia; quindi la cp, come perpendicolare alle ad, mn, ha tutt'i suoi punti ugualmente distanti dagli estremi a, d, m, n, che a dette linee appartengono: in conseguenza il punto p è ugualmente distante dagli estremi a, d; il che dà, che l'arco ap è uguale all'arco pd. Per la ragione medesima sarà l'arco mp=arco pn, ed in conseguenza, se dagli archi uguali ap, pd si tolgono rispettivamente le porzioni uguali mp, pn, rimarrà arco am=arco nd, come si è in questo teorema annunziato.

TEOREMA

Se da un punto a (Fig. 15) preso fuori della periferia del cerchio si tirano, alla parte convessa della medesima, delle linee rette, come ap, ab, ad secanti essa periferia, la più corta di tali rette sarà ab, che prolungata passa pel centro c del cerchio.

Dimostrazione. In fatti, tirato il raggio cd, si ha che la linea angolosa $adc > abc$; quindi togliendo rispettivamente le parti uguali cd, cb, rimarrà $ad > ab$. Lo stesso potendosi dimostrare di ogni altra linea secante che si tira, oltre di ab, alla parte convessa, rimane provato, che la retta ab è la più corta di tutte le altre.

TEOREMA

Se da un punto preso fuori la periferia del cerchio si menano delle linee rette secanti alla parte concava, come (Fig. 16) ad, acb ec.; quella che passa pel centro è la massima.

Dimostrazione. Ed in vero, tirato il raggio cd, si ha, che $acd > ad$; ma essendo cd=cb, perchè raggi, si ha acd=acb;

e perciò sarà pure $acb > ad$. Potendosi dimostrare altro tanto di tutte le secanti, che si menano alla parte convessa del cerchio da un punto preso fuori di esso, rimane provato che la massima di esse è sempre quella che passa pel centro.

TEOREMA

Se da un punto preso nel cerchio, al di sotto del centro c, come a, si tirano delle linee rette secanti la periferia, la più corta delle secanti è ab, (Fig. 17) che prolungata passa pel centro.

Dimostrazione. Poichè $cad > cd$, ovvero di cb, così tolto di comune la ca, rimarrà $ad > ab$. Lo stesso potendosi dimostrare d'ogni altra secante tirata dal punto a, oltre di ab, rimane pur dimostrato che ab è la minima di esse.

TEOREMA

Se da un punto preso in un cerchio, al di sopra del centro di esso, si tirano delle secanti alla periferia, la massima è quella che passa pel centro.

Dimostrazione. In fatti, se dal punto a superiore al centro c (Fig. 18) si tirano le secanti ab, ad, si ha che, essendo $cd = cb$, perchè raggi, sarà pure $ac + cd = ac + cb$, ma è $ac + cd > ad$, dunque sarà pure $ac + cb > ad$, ossia $ab > ad$. Potendosi altrettanto dimostrare di ogni altra secante, tirata dal punto a, rimane così provato il teorema.



LEZIONE XXVIII.ª

Corollari. Dal detto nell'ultimo teorema della precedente lezione si ricava, che se il punto, da cui si voglion tirare le secanti alla periferia, fosse, come *a* (Fig. 19) sulla circonferenza, sarebbe la linea retta *acb*, che passa pel centro, maggiore di qualunque altra corda, che pel centro non passa; ma *acb* è un diametro, dunque, generalmente parlando, si ha, che *di tutte le corde di un cerchio, la maggiore è il diametro.*

Or qui si noti che posta la figura simmetrica del cerchio, da un punto *a*, preso fuori, dentro, o sulla periferia del cerchio, giusta i casi esaminati nelle figure 15ª, 16ª, 17ª, 18ª; e 19ª, non si possono tirare ad essa periferia, che sole due linee rette *ad*, *ap*, una da un canto, e l'altra dall'altro, che si allontanano ugualmente dalla linea retta *ab*, che passa pel centro, e che perciò risultano fra loro uguali. Quindi, nel caso che il punto fosse sulla periferia, (Fig. 19) è evidente, che la linea retta passante pel centro, è un diametro, e perciò *da un punto sulla periferia non si possono tirare che due corde uguali nel cerchio, oltre il diametro.*

TEOREMA

Fra la tangente *ab* (Fig. 20), e la circonferenza del cerchio non vi può passare alcuna linea retta, ma bensì quante linee curve si vogliono.

Dimostrazione. Poichè *ab* è una tangente, sarà *ca*, che passa pel centro, perpendicolare alla medesima (Lez. XXVI.ª), e perciò sarà *ca* obbliqua sulla *ad*, che è una linea retta, tirata fra le tangente, e la circonferenza, se pur fosse possibile. Or si abbassi dal punto *c* la linea retta *co* perpendicolare alla *ad*; sarà perciò *co* minore di *ca*, che ad *ad* è obliqua; ma *ca* è un raggio del cerchio, dunque *co*, perchè minore di *ca* indica,

che il punto *o* è dentro il cerchio: vale a dire la linea retta *ad* passa per dentro il cerchio, e perciò non è fra la circonferenza, e la tangente come si è voluto supporre.

Intanto (Fig. 21) se *ac* si prolunga a piacere in *p*, e quindi centro *p*, e raggio *pa*, si descrive il cerchio *adh*; si vedrà che il cerchio ora descritto *adh*, e il cerchio *ao*, non avranno di comune, che il solo punto *a*; dappoichè, tirata la linea retta *cod*, avviene, che la retta *cd*, menata alla periferia *adh* dal punto *c*, che è sottoposto al centro *p*, sarà, per le cose dette, maggiore di *ca*, che prolungata, passa pel centro del cerchio. E poichè $ca = co$, sarà pure $cd > co$, il che mostra che il punto *o* è diverso dal punto *d*.

Similmente si dimostrerà che ogni altro punto della periferia *adh* è diverso da ciascuno di quelli, che appartengono alla periferia *ao*, meno il punto *a*, che gli è comune, da poichè, nella linea retta *acp*, trovandosi i centri *c*, e *p* de'due cerchi *ao*, *adh*, l'estremo *a* è comune a due raggi *ac*, *ap*.

Nello stesso modo si potranno descrivere quanti cerchi si vogliono, prendendo per centri de' punti a piacere sulla retta *ap*, e suo prolungamento, e sempre avverrà che tutte tali periferie rimarranno fra la tangente *ab*, e 'l cerchio *ao*, come si è in principio annunziato (1).

(1) La dimostrazione dell'enunciato teorema fa, a primo sguardo, osservare un paradosso qual' è quello che mentre fra la circonferenza d'un cerchio, e la sua tangente, vi passano infinite altre periferie, è poi impossibile, che vi passi alcuna linea retta. Ma ciò che bisogna intendere nel citato teorema si è, che l'angolo mistilineo *dab*, detto *angolo del contatto*, è minore di qualunque angolo rettilineo, per quanto questo possa essere piccolo; nè mai applicare alla circostanza la definizione dell'angolo, essere cioè l'incontro di due linee; coloro che vorranno far campeggiare una tale idea, vedranno nell'angolo del contatto *dab* uno spazio infinito, compreso tra la periferia *ad*, e la tangente *ab*, e si persuaderanno che si può evidentemente tirare dal punto *a* una retta, che passi tra i punti *o*, e *b*.

Forte disputa si è sul proposito sostenuta fra Geometri. Il Pellettario sostenne, per evitare il paradosso, che al contatto della periferia colla tangente non vi era angolo; e fu costretto di dire, che la tangente toccava il cerchio, o due periferie si toccavano, non in un punto, ma in una lineetta infinitamente piccola. Clavio scrisse, che l'angolo del contatto, e l'angolo rettilineo, erano angoli eterogenei, quasi che l'uno, e l'altro non si calcolasse per

Corollario. Risulta dal precedente teorema che, potendosi fra la tangente *ab*, e l'arco *ao*, far passare un infinito numero di periferie, la linea retta *bo*, per quanto piccola si fosse, rimarrà divisa dalle periferie medesime in un infinito numero di parti picciolissime, il che dà la maniera di dimostrare, anche geometricamente, la divisibilità della materia all'infinito.

la sola inclinazione de' lati. Ma tutte queste dispute, che non si raggiravano, che a parole, caddero in non cale quando si riconobbe, che non concernevano per niente i principii geometrici.

Pur tuttavia non è superfluo il riportare sul proposito l'opinione del *Sauri*; egli fa notare, che la circonferenza esteriore, come *adh*, sin dal punto *a* di contatto colla circonferenza *ao*, comincia a curvarsi per abbracciarla; come avverrebbe dalla circonferenza d'un terzo cerchio, che allo stesso punto *a* di contatto rivolterebbe subito per abbracciare *adh*; ma la linea retta *ad*, seguendo sempre la propria primitiva direzione, deve fin dal suo cominciamento secare la periferia *ao*.

LEZIONE XXIX.ª

MISURA DEGLI ANGOLI.

Abbiamo precedentemente detto, che ogni angolo il quale ha il suo vertice al centro di un cerchio, è misurato dall'arco dello stesso cerchio, che trovasi fra i suoi lati compreso. Con questa guida possiamo ora dare la soluzione del seguente

PROBLEMA

Formare su di una linea retta data un angolo, che sia uguale ad un altro angolo dato.

Operazione. Vuolsi sulla *fg* (Fig. 22) formare un angolo che sia uguale ad un altro dato *bac;* basterà descrivere col centro *a*, e raggio preso a piacere, un arco *bc;* indi col centro *f*, e con un raggio uguale al precedente, si descrivi un altro arco di cerchio *gh*.

Ciò fatto, si prenda col compasso la distanza dinotata dall'arco *bc*, e si porti, a contare dal punto *g*, sull'arco *gh;* così determinato il punto *h*, si unisca il punto *f* col punto *h*, mediante la linea retta *fh;* sarà *hfg* l'angolo dimandato.

Dimostrazione. Imperciocchè essendo detto angolo, ed il dato *bac* misurati da archi uguali, fatti collo stesso raggio, essi sono uguali tra loro.

TEOREMA

L'angolo *bad* (Fig. 12), che ha il suo vertice *a* sulla circonferenza del cerchio, non che l'angolo *gab*, fatto dalla tangente *ga*, e dalla corda *ab*, hanno per misura, ciascuno, la metà dell'arco, frapposto fra i proprj lati.

Dimostrazione. Due casi possono avvenire; o che una delle corde, che formano l'angolo, passi pel centro del cerchio,

come *ad*, o che non vi passi alcuna di esse. Supponiamo in primo luogo, che una di tali corde passi pel centro; vale a dire sia un diametro, come *ad*: in questo caso, tirisi nello stesso cerchio il diametro *fh*, paralello all'altro lato *ab*; sarà perciò ang. bac=ang. fcd, perchè corrispondenti dalla stessa parte delle paralelle: ma *fcd*, avendo il suo vertice al centro, è misurato dall'arco *fd*; dunque anche l'angolo *bac*, o *bad*, sarà misurato dall'arco *fd*.

Or si ha che fcd=ach, perchè angoli opposti al vertice, in conseguenza sarà arc. fd= arc. ah; ma, a causa delle corde paralelle *ab*, *fh*, si ha arc. ah=bf, dunque sarà pure fd=bf, e quindi *bd* doppio di *fd*. Ma l'angolo *bad* si è trovato aver per misura l'arco *fd*, che ora si è rinvenuto metà di *bd*, dunque è vero, che l'angolo fatto dalle due corde *ba*, *ad*, che si congiungono sulla periferia, e delle quali una passa pel centro, è misurato dalla metà dell'arco, in esse frapposto.

Inoltre, perchè angolo *gad*, formato dalla tangente *ag*, e dalla corda *ad*, che passa pel centro, è retto; ed avendo l'angolo retto per misura 90°, ossia la metà della mezza circonferenza *abd*, perciò sarà $gad=\frac{ab}{2}+\frac{bd}{2}$; ma poco prima si è dimostrato, che $bad=\frac{bd}{2}$, dunque il rimanente angolo *gab* risulta $=\frac{ab}{2}$, vale a dire che è benanche vero lo enunciato teorema, in quanto a che l'angolo fatto dalla tangente, e da una corda, ha per misura la metà dell'arco interposto fra esse.

Rimane ad esaminarsi il caso, in cui niuna delle corde passi pel centro, come nell'angolo *baf* (Fig. 23). Puole questa ipotesi offrire anche due casi; 1.° se il centro trovasi fra i lati dell'angolo, 2.° che si trovi fuori di essi. Nel primo caso, tirandosi il diametro *ad*, l'angolo *baf* rimarrà diviso nelle due parti *bad*, *daf*. Or pel dimostrato qui sopra, si

ha $bad = \frac{bd}{2}$, e $daf = \frac{df}{2}$, ed in conseguenza tutto l'angolo $baf = \frac{bf}{2}$, come si è enunciato.

Nel 2.° caso, se l'angolo fosse formato, come *gaf*, da corde, che rimangono il centro *c* del cerchio fuori di esse, in tale ipotesi, tirato il diametro *ad*, si ha $dag = \frac{gd}{2}$, ossia $dag = \frac{df}{2} + \frac{fg}{2}$, ma il solo angolo *daf* è uguale $\frac{df}{2}$; dunque la rimanente porzione *fag* sarà uguale $\frac{gf}{2}$, come si è enunciato.



LEZIONE XXX.ª

Definizione = Suole chiamarsi *angolo del segmento* quello fatto da una tangente, e da una corda; ed *angolo iscritto* quello fatto da due corde, o da un diametro, e da una corda.

Corollari. Posta la generalità del precedente teorema, ne risulta, che l'angolo *bap*, fatto dalla corda *ba*, e dall'altra *ag*, prolungata in *p*, avrà per misura la metà degli archi *ab*, *ag*, che sono i frapposti fra dette corde. Ed in fatti l'angolo *bap*, e l'altro *bag*, perchè formati dal cadere di *ba* su di *pg*, sono contigui, e come tali sono insieme uguali a due retti, la cui misura, come si sa, è la metà della circonferenza *abfg*. Ma è l'angolo $bag = \frac{bg}{2}$, dunque il rimanente angolo $bap = \frac{ab}{2} + \frac{ag}{2}$.

Siegue pure, che gli angoli (Fig. 24.) *a*, *b*, che sono nella medesima porzione di cerchio *daf*, avendo per misura ambi la metà dell'arco *df*, sono fra loro uguali; e poichè l'angolo *dcf*, che ha il suo vertice al centro *c* è misurato da tutto l'arco *df*, risulta, che detto angolo è doppio di ciascun de' due *a*, *b*. Potendosi altrettanto dimostrare di qualunque angolo, che ha il suo vertice sulla medesima porzione di periferia *daf*, resta fermato come principio generale, che *ogni angolo, fatto al centro di un cerchio, è doppio di quello fatto alla periferia, purchè poggiano sullo stesso arco*.

In fine (Fig. 25) l'angolo *bad*, che poggia sul diametro *bd* avendo per misura mezza periferia, o 90;° resta pure generalmente fermato, che *ogni angolo, che poggia sulla mezza periferia di cerchio, è un angolo retto*.

PROBLEMA

Dal punto dato *b* sulla linea retta indefinita *ab* (Fig. 26) inalzare una perpendicolare sulla medesima.

Operazione. Prendasi al di fuori, e superiormente alla data linea *ab* un punto qualunque *c;* indi col centro *c*, e raggio *cb* si descriva il cerchio *abd:* tirisi al punto *a*, intersezione della data retta colla periferia, il diametro *acd;* finalmente uniscasi il punto *d* coll'altro dato *b;* la *db* sarà la perpendicolare cercata.

Dimostrazione. Poichè l'angolo *abd* poggia sulla mezza circonferenza, è retto, ed in conseguenza la linea retta *db* è perpendicolare alla data *ba*.

PROBLEMA

Da un punto *a*, preso fuori della circonferenza *pd* (Fig. 27) menarvi la tangente.

Operazione. Congiungasi il dato punto *a* col centro *c;* la congiungente *ac* si divida per metà in *o;* indi col centro *o*, e col raggio *oa*, si descriva il cerchio *adp*, dal punto *a* si tiri la linea retta *ad*, al punto *d*, ove la periferia del cerchio, ora descritto, taglia quella del cerchio dato: sarà *ad* la voluta tangente.

Dimostrazione. Poichè l'angolo *adc* poggia sulla mezza periferia, è retto; ed in conseguenza la *da* è perpendicolare al raggio *cd*, e perciò tangente al dato cerchio *dp*.

Corollario. Poichè i punti d'intersezione del cerchio *adc* coll'altro dato *dp* sono due; cioè *d*, e *p*, così dal punto *a* si può tirare l'altra linea retta *ap* all'altro punto d'intersezione, e per le ragioni, nella precedente dimostrazione dette, l'angolo *apc* sarà pure retto, ed *ap* pur tangente allo stesso cerchio *dp;* dal che ne siegue che *da un punto dato fuori di una periferia di cerchio si possono alla medesima menare due sole tangenti*.

Definizioni. Degli angoli fatti in un cerchio, dicesi *eccentrico* quello, che ha il suo vertice fra il centro, e la periferia, come *bad* (Fig. 28): dicesi poi *circoscritto* quell'angolo, che ha il suo vertice al di fuori del cerchio come *dab*, (Fig. 29).

TEOREMA

L'angolo eccentrico, come dab (Fig. 28) è misurato dalla metà della somma de'due archi bd, fg, interposti fra i suoi lati, prolungati in f, ed in g.

Dimostrazione. Tirata la gh paralella all'altro lato prolungato fd, sarà $bad=bgh$, perchè angoli corrispondenti. Ma perciò che si è detto innanzi è $bgh=\frac{bdh}{2}=\frac{bd}{2}+\frac{dh}{2}$, e per le paralelle fd, gh, si ha, che $dh=gf$, dunque sarà $bgh=\frac{bd}{2}+\frac{gf}{2}$: ma $bgh=bad$, perchè angoli corrispondenti delle paralelle, dunque sarà pure $bad=\frac{bd}{2}+\frac{gf}{2}$.

TEOREMA

L'angolo circoscritto dab (Fig. 29) ha per misura la metà della differenza de' due archi; l'uno concavo, e l'altro convesso db, fg, compresi fra'suoi lati.

Dimostrazione. Tirisi gx paralella a da; gli angoli corrispondenti dab, xgb saranno fra loro uguali; or l'angolo iscritto $xgb=\frac{xb}{2}$; di più $xb=db-dx=db-fg$: dunque sarà xgb, ovvero $dab=\frac{db-fg}{2}$.

Corollario. Siegue dal teorema precedente, che se ad si confonderà colla tangente ap, l'angolo pab risulterà uguale alla metà della differenza de'due archi pg, pdb; come pure l'angolo mab risulterebbe uguale alla metà della differenza de'due archi mb, mg: e quindi tutto *l'angolo* pam, *fatto dalle due tangenti* ap, am, *è misurato dalla metà della differenza de' due archi* pnbm, pm, *segnati da' due punti di contatto.*

LEZIONE XXXI.ª

DE' POLIGONI.

Definizioni. Uno spazio, rinchiuso da linee, dicesi *figura*. La figura di tre lati vien detta *triangolo;* quella di quattro lati *quadrilatero;* quella di cinque lati *pentagono*; ed in generale dicesi *poligono* ogni figura di un numero qualunque di lati.

I poligoni sono *regolari* quando hanno tutti i lati uguali, non che gli angoli: in altro caso vengono detti *irregolari*.

Ne'poligoni regolari, quel punto preso in esso, e che serba uguale distanza da tutt'i vertici de'suoi angoli, dicesi *centro*. Le linee rette, tirate dal centro a'vertici di ciascun angolo, diconsi *raggi obbliqui;* e le perpendicolari, che dal centro si abbassano su ciascun lato del poligono, diconsi *raggi dritti*.

Due poligoni si dicono *simmetrici* quando hanno i lati, presi a due a due, rispettivamente paralelli: quindi i poligoni simmetrici debbono avere un numero pari di lati.

Quel triangolo, che ha tutti i lati uguali, dicesi *equilatero*: tal'è il triangolo *bac* (Fig. 30): ma se ha due soli lati uguali dicesi *isoscele*, come lo è *bac* (Fig. 31): in fine, se tutti i lati di un triangolo sono disuguali, esso dicesi *scaleno*, come *bac*, (Fig. 32).

In quanto poi agli angoli, quel triangolo, che ha tutti gli angoli acuti, dicesi *acutangolo:* se ha un angolo retto, dicesi *rettangolo;* e dicesi *ottusangolo* quando ha un angolo ottuso.

In ogni triangolo, quel lato, che si considera come opposto ad uno de'suoi angoli, dicesi *base;* e se l'angolo, che si prende a considerare è retto, il lato, che gli si oppone, vien chiamato *ipotenusa*, ed i rimanenti due lati *cateti*.

TEOREMA

In ogni triangolo tutti tre gli angoli, presi insieme, sono uguali a due angoli retti.

Dimostrazione. Pe'tre punti a, b, c (Fig. 33) del triangolo abc, si facci passare la circonferenza di cerchio: ciascuno de' tre angoli a, b, c, avrà per misura la metà dell'arco, su cui poggia, e tutti tre, presi insieme saranno misurati dalla metà dell'intiera periferia, ossia da 180°, ma questo è il valore di due angoli retti; dunque è vero l'enunciato teorema.

Corollari. In conseguenza del precedente teorema, in un triangolo non potrà esservi, che un solo angolo retto, ed un solo ottuso, altrimenti la somma di tutti tre sarebbe maggiore di due retti.

Se il triangolo è rettangolo, come bac, il di cui angolo bac è retto, i rimanenti angoli b, e c, posti sulla base bc, insieme presi devono essere uguali ad un angolo retto; ed in conseguenza uno complemento dell'altro (Lezione XXIII.ª). Quindi in un triangolo rettangolo, se si conosce uno de'due angoli acuti, si conoscerà presto l'altro, calcolando i gradi, che mancano al noto angolo acuto, per compiere l'angolo retto.

TEOREMA

In un triangolo qualunque abc (Fig. 32), se si prolunga uno dei suoi lati, come bc, verso d, l'angolo esterno acd è sempre uguale a'due angoli interni ed opposti a, e b insieme presi; ed in conseguenza maggiore di uno di essi angoli.

Dimostrazione. Poichè gli angoli acd, acb, come contigui, sono uguali insieme a due angoli retti; ed uguale a due angoli retti sono pure i tre angoli abc, acb, cab, del triangolo abc, sarà perciò:

$acd + acb = a + b + acb$; si tolga quindi di comune l'angolo acb, rimarrà

$acd = a + b$, e quindi $acd > a$, come pure $acd > b$, il che è conforme all'enunciato teorema.

TEOREMA

Se due triangoli abc, dfg (Fig. 34), hanno i due lati ab, ac, rispettivamente uguali a'due lati df, dg; non che l'angolo

a, compreso da'due primi lati, uguale all'angolo *d*, compreso da'secondi, detti triangoli saranno perfettameute uguali.

Dimostrazione. Intendasi il triangolo *abc* soprapposto all'altro *dfg*, in modo che il lato *ab* si distenda sul lato *df*, e che il punto *a* cada sul punto *d*, ne avverrà, per essere $ab=df$, che il punto *b* coinciderà col punto *f*, e tutto il lato *ab* si confonderà con *df*.

Or, essendosi supposto $a=d$, il lato *ac* cadrà sul lato *dg*; ed essendo pure per supposizione $ac=dg$, anche il punto *c* cadrà sul punto *g*, ed *ac* si confonderà con *dg*.

Ciò posto, cadendo i tre punti *a*, *b*, *c* del triangolo *abc* su i tre punti *d*, *f*, *g*, del triangolo *dfg*, tutto il primo triangolo combacerà col secondo, e quindi saranno perfettamente uguali, come si è in principio enunciato.



LEZIONE XXXII.ª

TEOREMA

Se due triangoli *abc*, *dfg*, hanno i tre lati *ab*, *bc*, *ca* uguali rispettivamente a' tre lati *df*, *fg*, *gd*, essi triangoli saranno perfettamente uguali.

Dimostrazione. Accavallato il triangolo *abc* sull'altro *dfg*, in modo, che il punto *a* cada sul punto *d*; per essere $ab=df$, anche il punto *b* cadrà su *f*; ed essendosi supposto $bc=fg$, anche *c* cadrà su *g*, ed *fg* si confonderà con *bc*, come *ab* si confonderà con *fd*. Quindi i tre punti *a*, *b*, *c* cadendo su i tre punti *d*, *f*, *g* i due triangoli combaceranno, e saranno perfettamente uguali.

TEOREMA

Se due triangoli *abc*, *dfg*, hanno due angoli *b*, *c* uguali rispettivamente agli angoli *f*, *g*, ed il lato *bc*, adjacente a' primi angoli, uguale ad *fg*, adjacente a' secondi, detti triangoli saranno perfettamente uguali.

Dimostrazione. Si accavalli il triangolo *abc* sull'altro *dfg*, in modo, che il punto *b* cada sul punto *f*: e perchè $bc=fg$, anche il punto *c* cadrà sul punto *g*: ma si è supposto l'angolo $b=f$, dunque il lato *ab* cadrà su di *df*; come, per essersi supposto l'angolo $c=g$, anche *ac* cadrà su di *dg*; ed in conseguenza il punto *a* deve necessariamente cadere su *d*. I tre punti adunque *a*, *b*, *c* del triangolo *abc*, cadendo su i tre punti *d*, *f*, *g* del triangolo *dfg*; essi triangoli saranno perfettamente uguali.

LEMMA

Vogliasi bisecare un qualunque angolo *acb* (Fig. 38).

Operazione. Facciasi col centro *c*, e raggio a piacere, un arco di cerchio *ab*, e diviso questo in due parti uguali in *m* col

metodo dato nella Lezione XXVII.ª, si uniscano i punti *m*, e *c*, colla retta *mc*, questa dividerà per metà l'angolo dato.

Dimostrazione. Poichè i due angoli *acm*, *mcb*, vengono misurati dai due archi uguali *am*, *mb*, essi sono fra loro uguali.

TEOREMA

Nel triangolo isoscele ai lati uguali si oppongono angoli uguali.

Dimostrazione. Nel triangolo isoscele (Fig. 6) *hdf*, i cui lati uguali siano *hd*, *hf*, dividasi per metà l'angolo *dhf*, compreso da detti lati, mercè la *hp*. È chiaro ch'essendo il lato *hd*=*hf*, e la *hp* comune ai due triangoli *hdp*, *hfp*, questi risultano perfettamente uguali, ed in conseguenza la *dp* uguale alla *pf*. Per la qual cosa la *hp* passa pe' punti *h* e *p*, ugualmente distanti da *f*, *d*, e perciò *hp* è perpendicolare a *df*. Ciò posto l'angolo *hpd* essendo uguale all'altro *hpf*, perchè ambi retti, ed essendosi fatto l'angolo *dhp*=*fhp*, resterà il terzo angolo *hdp* uguale all'angolo *hfp*, ma questi angoli sono opposti ai lati uguali *hf*, *hd*, dunque è vero il teorema.

Corollario. Dunque ogni triangolo equilatero è anche equiangolo; e poichè tutti gli angoli di un triangolo sono uguali a due retti, ne siegue, che ogni angolo del triangolo equilatero è un terzo di due retti.

TEOREMA

In ogni triangolo al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore, e viceversa.

Dimostrazione. Sia nel triangolo (Fig. 32) *abc* il lato *bc* maggiore di *ba*: si tagli *bd'*=*ba*, e si congiunga *ad'*. Sarà l'angolo *bad'*=*bd'a*, per essere opposti a lati uguali. Or nel triangolo *acd'* trovandosi protratto il lato *cd'* verso *b*, sarà l'angolo esterno *ad b* maggiore dell'interno ed opposto *acb*, ed in conseguenza anche l'angolo *bad'* sarà maggiore di *acb*, e tutto l'angolo *bac* molto maggiore di *acb*. Ma *bac* si oppone

al lato maggiore *bc*, ed *acb* al lato minore *ab*, dunque è vero il teorema.

L'inversa proposizione è da per sè chiara, da poichè supponendo l'angolo *bac* maggiore di *acb*, la *bc* non potrà essere nè minore, nè uguale di *ab*, giacchè nel primo caso l'angolo *bac* sarebbe minore, e nel secondo caso uguale a *bca*, il che è contrario alla ipotesi.

PROBLEMA

Dato un triangolo *dfg*, (Fig. 34) formarne un altro, che gli sia uguale.

Operazione. Tirisi la linea retta $bc = fg$; al punto *b* si facci l'angolo $abc = dfg$, ed al punto *c* si facci l'altro angolo $acb = dgf$. Si prolunghino le linee rette *ba*, *ca*, finchè s'incontrino in *a*, sarà il triangolo $abc = dfg$.

Dimostrazione. Poichè i due triangoli *abc*, *dfg*, hanno i due angoli *b*, *c*, rispettivamente uguali a'due angoli *f*, *g*, il lato *bc*, adjacente a'primi, uguale al lato *fg*, adjacente a'secondi, essi saranno perfettamente uguali.

TEOREMA

La somma di tutti gli angoli di un poligono qualunque *abcdf* di cinque lati (Fig. 35), che però non abbia alcun angolo rientrante, è uguale a tanti angoli retti, quanti ne indica il doppio numero dei lati di esso poligono, meno quattro.

Dimostrazione. Tirate dal vertice dell'angolo *a* del poligono, le linee rette *ac*, *ad*, esso rimane diviso in tre triangoli *abc*, *acd*, *adf*. Intanto, perchè i tre angoli di un triangolo pareggiano sempre due retti, saranno i triangoli $abc + acd + adf = 6$. angoli retti; ma detti triangoli compongono la somma di tutti gli angoli del poligono, sarà dunque la somma di essi angoli, ossia $a + b + c + d + f = 6$. ang. retti. Or il dato poligono essendo di cinque lati; il doppio numero di essi, meno quattro, dando pur 6; rimane provato

l' enunciato teorema; vale l' uguale dimostrazione per ogni altro poligono di un numero qualunque di lati.

Applicazione. Posto il precedente teorema, un poligono di 8 lati ha i suoi angoli uguali a 12 angoli retti: e poichè ogni angolo retto è misurato da 90°, così il poligono di 8 lati ha i suoi angoli uguali 1080.°

Similmente quello di 4 lati ha i suoi angoli uguali a 360°, ed il pentagono gli ha uguali a 540.° ec.



LEZIONE XXXIII.

TEOREMA

Se i lati di un poligono qualunque si protraggono fuori di esso, la somma degli angoli esterni è uguale a quattro angoli retti.

Dimostrazione. Nel pentagono *abcdf*, (Fig. 37), prolungato ciascun lato in *p*, si ha, che ogni angolo interno, come *abc*, unito al corrispondente esterno *cbp*, pareggiano due angoli retti, perchè contigui. E poichè il numero degli angoli interni, come pure quello degli esterni, corrisponde al numero de'lati del poligono; perciò la somma degli angoli interni con gli esterni del dato poligono, è uguale alla somma di tanti due retti, quanti ne indica il numero di lati del poligono medesimo; e nel nostro caso, essendo un pentagono, essi angoli esterni ed interni, uguagliano 5 di due angoli retti, ossiano 10 retti.

Intanto, pel teorema precedente, i soli angoli interni sono uguali nel pentagono a 6 retti; dunque i rimanenti angoli, che sono gli esterni, pareggiano 4 angoli retti, come si è in principio annunziato. Simile dimostrazione è applicabile ad ogni altro poligono di un qualunque numero di lati.

Corollario. Se il poligono è regolare, gli angoli interni essendo fra loro uguali, tali pure risulteranno gli esterni: imperciocchè essendo i due angoli $cbp + cba = 2$ ang. retti, nonche $bap + baf = 2$ ang. retti, si avrà

$$cbp + cba = bap + baf;$$

ma si è supposto esssere $cba = baf$; dunque sarà pure $cbp = bap$. Ciò vale per tutt'i rimanenti angoli.

Si ricava inoltre, che in un poligono regolare, per aversi il valore di ciascun angolo esterno, basterà dividere 360°, ossiano 4 ang. retti pel numero de'lati del poligono.

TEOREMA

Se gli angoli di un poligono regolare vengono divisi in due parti uguali con delle linee rette, queste concorreranno tutte nel centro del poligono; e viceversa le linee rette, o raggi obliqui che dal centro di un poligono regolare, si menano a'vertici degli angoli di esso, dividono per metà tali angoli.

Dimostrazione. Sia il poligono regolare *abdg* (Fig. 38); e suppongansi divisi per metà i due angoli *a*, e *b*, per lo mezzo delle linee rette *ac*, *bc*, si prolunghi il lato *ah* in *k*. Si ha, che $cah + cak = 2$ angoli retti; ma è $cak > cab$; dunque $cah + cab < 2$ angoli retti. Or l'angolo $cah = cba$, perchè ciascuno è metà rispettivamente degli angoli *a*, e *b*, che, come angoli del poligono regolare, sono fra loro uguali; per ciò sarà $cba + cab < 2$ angoli retti; e quindi le due linee rette *ac*, *bc*, tagliate dalla terza linea *ab*, avendo gli angoli interni dalla stessa parte minori di due retti, esse non saranno paralelle, e quindi concorrer devono in un punto *c*. Nello stesso modo si dimostra che le altre rette bisecanti *ch*, *cg*, ec. concorrono nel centro *c*.

Or, dal centro *c* del poligono, si tirino a'vertici degli angoli di esso le linee rette *cd*, *cf*, *cg*, *ch*: se dimostreremo, che queste tagliano per metà i rispettivi angoli *d*, *f*, *g*, *h*, di esso poligono, il nostro teorema rimarrà dimostrato.

I due triangoli *cdf*, *cfg*, hanno il lato $cd = cg$, perchè raggi del poligono regolare; hanno inoltre il lato *fc* comune ad essi triangoli, non che la base $df = fg$, tali triangoli sono perfettamente uguali, e quindi è l'angolo $cfd = cfg$; per la qual cosa rimane dimostrato che la linea retta *cf* divide per metà l'angolo *d* del poligono.

Nello stesso modo, continuando il ragionamento, si dimostrerà che le *cg*, *ch*, ecc. essendo fra loro uguali, dividono per metà rispettivamente gli angoli *f*, *g*, *h*. Quindi rimane pienamente provato il presente teorema.

Corollari. Poichè i triangoli *cab*, *cbd*, *cdf*, *cgf*, *chg*, hanno

i lati, e gli angoli uguali, ciascuno, a ciascuno, essi sono tutti perfettamente uguali fra loro, ed in conseguenza *le linee rette, che dal centro si tirano ai vertici degli angoli di un poligono regolare, dividono questo in tanti triangoli uguali, quanti sono i lati dello stesso poligono.*

Inoltre, essendo fra loro uguali tutte le linee rette *ca, cb, cd*, ec.: se col centro *c*, e raggio una delle date rette, si descrive un cerchio, questo passerà per tutt'i vertici degli angoli del poligono; ossia *ad ogni poligono regolare si può circoscrivere un cerchio.*

Or tutti gli angoli al centro *c*, avendo per misura la intiera periferia, essi sono uguali a 4 angoli retti, ossia sono misurati da 360°; quindi ciascun angolo al centro si otterrà dividendo 360° pel numero de'lati del poligono, che è corrispondente al numero di essi angoli; ma si è veduto, che anche ciascun angolo esterno si ottiene dividendo 360° pel numèro de'lati del poligono, dunque, tirati i raggi obliqui, si ha che *ciascun angolo al centro di un poligono regolare, è uguale a ciascun angolo esterno.*

Così, se il poligono regolare è un esagono (Fig. 38) ciascun angolo al centro sarà uguale a $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$; ma ciascun triangolo, in cui il poligono è stato diviso, avendo due lati uguali, come *ca, cb*, si ha che gli angoli *cab, cba*, sono pur fra loro uguali; ed essendosi inoltre dimostrato, che ciascun angolo al centro, come *acb*, è uguale a 60°, sarà ciascun angolo alla base *cab, cba* pur uguale a 60°, perchè tutti tre, insieme presi, devono essere uguali a 180°: vale a dire i triangoli del poligono, al pari di *acb*, sono equiangoli, e quindi equilateri, dal che si deduce essere $ba=bc=ca$, ossia *ciascun lato dell'esagono è uguale al raggio del poligono medesimo.*

Con questa verità, si può facilmente iscrivere in un cerchio un esagono, portando sei volte il raggio del cerchio stesso sulla periferia come vedremo in seguito.

TEOREMA

Tutt'i raggi dritti di un poligono regolare, come *cp*, *cq*..., sono fra loro uguali, (Fig. 38).

Dimostrazione. Poichè il raggio obliquo *ch* divide l'angolo *h* in due parti uguali (teor. preced.), i triangoli rettangoli *cqh*, *cph*, avendo gli angoli *chp*, *qhc* fra loro uguali, come pure l'angolo $q=p$, perchè retti, il lato *ch* comune, essi triangoli saranno perfettamente uguali, e quindi $cq=cp$.

Similmente si può dimostrare essere fra loro uguali tutt'i rimanenti raggi dritti, e con ciò il teorema resta pienamente provato.

N. B. Premettiamo alla prossima lezione le seguenti

Definizioni. Un poligono che ha tutt'i suoi lati tangenti alla periferia di un cerchio, dicesi *circoscritto* ad esso cerchio; e questo *iscritto* al poligono.

Un poligono che tocca con i vertici de' suoi angoli una periferia di cerchio, dicesi *iscritto* in esso cerchio; ed il cerchio *circoscritto* al poligono.



LEZIONE XXXIV.ª

POLIGONI ISCRITTI, E CIRCOSCRITTI AL CIRCOLO (1).

Cominceremo dal notare, che, siccome si può far passare un circolo per tre punti dati, così potremo sempre far passare un circolo pe'vertici degli angoli di un triangolo qualunque, come *abc* (Fig. 33). In questo caso il triangolo è *iscritto* nel cerchio, ed il cerchio è *circoscritto* al triangolo. Questa proprietà, però, appartiene esclusivamente al triangolo, mentre, pe'poligoni di un maggior numero di lati fa mestieri, che essi siano dei regolari iscrittibili, per poter essere iscritti, o circoscritti al cerchio, come vedremo.

In quanto al circoscrivere il circolo ad un dato poligono regolare. Per la uguaglianza de'raggi obliqui di esso, è questa un operazione, che può agevolmente farsi, prendendo per centro il centro del poligono, e per raggio un raggio obliguo di esso.

Rimane quindi a vedersi il modo d'iscrivere il cerchio nei poligoni regolari; e d'iscrivere, e circoscrivere i poligoni regolari al cerchio. Cominciamo dal seguente

PROBLEMA

In un dato poligono regolare *abdfg* (Fig. 39) iscrivere un cerchio.

Operazione. Si bisechino gli angoli *a*, *b*, *d*, ec.: otterrassi così il centro *c*, del dato poligono, si abbassino le perpendicolari *cp*.... su ciascuno de'suoi lati; indi centro *c*, e raggio uno delle perpendicolari *cp*, ossia uno de'raggi dritti, si de-

(1) Questa interessante teorica conta la sua origine con quella delle prime idee di matematica. TALETE MILESIO, uno de'primi che diede opera a'triangoli, trovò la maniera d'iscrivere l'equilatere nel circolo; per lo che è fama, che sagrificasse un bue agli Dei. TALETE meritò, per la sua saviezza, il tanto decantato Tripode, fabbricato da Vulcano.

scrivi il cerchio *ppp;* questo si troverà iscritto nel poligono dato.

Dimostrazione. Essendosi nel precedente teorema dimostrato, che tutt'i raggi dritti sono uguali fra loro, e sono pure perpendicolari a'lati del poligono; saranno perciò tutt'i lati del poligono tangenti al cerchio descritto, e quindi il dato poligono è circoscritto al cerchio *pp,* e questo è al dato poligono iscritto.

Corollario. Quindi, ad *ogni poligono regolare verrà circoscritto il cerchio, se questo si descriverà col raggio obbliquo del poligono, e verrà iscritto, se si descriverà col raggio dritto, tenendo, in ambi i casi, per centro, il centro del poligono.*

PROBLEMA

Iscrivere un poligono regolare in un dato cerchio.

Operazione. La principale operazione da farsi, per risolvere il presente problema, è di calcolare il numero dei gradi, che corrisponde all'arco di cerchio, che dev'essere sostenuto da uno dei lati del poligono, che si vuole iscrivere. E ciò si mostra da sè, se si riflette, che i lati del poligono regolare, essendo fra loro uguali, uguali pure devono essere gli archi del cerchio, che da ciascun lato vengono sostenuti. Così il triangolo equilatere iscritto marca co'suoi lati, sulla periferia del cerchio, tre archi uguali, ogni uno di 120°; il lato del quadrato iscritto sostiene un arco di 90°; ec.

Ciò posto, se il poligono da scriversi, è un quadrato, basterà menare ad un diametro qualunque *bf* (Fig. 41) tirato nel dato cerchio, l'altro diametro, come *ad,* che gli sia perpendicolare; congiunti *a, b, d, f,* colle corde *ab, bd, df, fa,* si avrà il quadrato iscritto.

Dimostrazione. Poichè gli angoli *acf, acb, bcd, dcf,* sono retti, gli archi *ab, bd, df, fa,* sono ciascuno di 90°, e quindi le corde *ab, bd, df, fa,* fra loro uguali. Di più, essendo $ca = cb$, perchè raggi di uno stesso cerchio, sarà angolo $cab = cba$; e perchè *acb* è retto, ciascuno de'rimanenti due angoli uguali, come *cab*, sarà misurato da 45.° Similmente

si dimostra, che ciascuno de'due angoli uguali *caf*, *cfa*, è uguale 45°; di modo che sarà *cab* + *caf* = 45° + 45° = 90°; ossia l'angolo *baf* = un retto.

In pari modo dimostrerassi, che ciascun altro angolo *afd*, *fdb*, *dba*, è retto; e quindi la figura quadrilatera iscritta *abdf*, avendo i lati uguali, e gli angoli retti, è un quadrato.

Osservazione. Colla iscrizione del quadrato si possono immediatamente ottenere altri poligoni regolari iscritti nel cerchio. In fatti, dividendo per metà ciascuno de' quattro archi, segnati dal quadrato, si avranno otto archi uguali, e, congiunte le rispettive corde, si avrà iscritta la figura di otto lati. Similmente, proseguendo le suddivisioni di ciascun arco, si avranno le figure iscritte di 16, 32, 64, ec. lati.

Si noti pure, che iscrivendosi nel cerchio l'esagono, col metodo accennato nella lezione XXXIII.ª, si avrà immediatamente iscritto il poligono di 12 lati, se ciascun arco dell'esagono si divide per metà, come sopra si è detto; e proseguendo le suddivisioni, si avranno iscritte le figure regolari di 24, 48, ec. lati.

Avvertimento. Egli è chiaro, dietro quanto si è detto, che si possono iscrivere ne'cerchi tutti que'poligoni regolari il cui numero di lati è un divisore esatto di 360, ossia de'gradi, che compongono la periferia di cerchio. Vale a dire, si può sempre iscrivere nel cerchio il *pentagono*, il *decagono*, il *quadrato*, il *triangolo equilatero*, l'*esagono*, il *dodecagono*, il *quindecagono*, e quindi la figura di 30 lati, e tutte quelle altre che da'detti poligoni si possono ottenere, colle divisioni successive di ciascun arco per metà, come sopra si è osservato.

Ciò non ostante, Carlo Gaus, nella sua opera *Disquisitiones aritmeticae*, ha dimostrato, che si può iscrivere nel cerchio, coi mezzi della Geometria elementare, il poligono regolare di 17 lati; anzi, generalmente parlando, egli dà il modo d'iscrivere ogni poligono regolare, il di cui numero di lati è una potenza di 2, più una unità, purchè il totale dia un numero *primo*.

LEZIONE XXXV.ª

Colle idee finora sviluppate, ci sarà facile la soluzione del seguente

PROBLEMA

Dividere in tre parti uguali un angolo retto, ovvero l'arco di 90.°

Operazione. Si adatti nel quadrante *af*, (Fig. 41) il raggio del cerchio, ossia il lato dell'esagono iscritto, e sia *am;* indi, lo stesso raggio si adatti nel quadrante medesimo da *f* in *n;* si avranno in tal modo i due punti *n*, *m*, che nel quadrante segnano i tre archi *an*, *nm*, *mf;* dico essere questi fra loro uguali.

Dimostrazione. Essendo *am* un lato dell'esagono, sarà l'arco $am=60°$; e per la ragione medesima sarà $fn=60°$; dunque sarà $an=af-nf=90°-60°=30°$; come pure $mf=af-am=90°-60°=30°$; ed in conseguenza la rimanente parte *nm* del quadrante sarà pure uguale a 30°, perchè tutto componesi di 90.°

Qui si noti che, ottenuto colla trisezione dell'angolo retto, l'arco di 30° si potrà colla corda di esso iscrivere il dodegagono regolare, e tutte le figure, che da lui dipendono.

Non rimane, per esaurire la teorica delle iscrizioni, e circoscrizioni dei poligoni e de'cerchi, che indicare il modo di *circoscrivere al cerchio un poligono.*

Questo problema ammette una generale soluzione, essendo esso unicamente dipendente da quella della iscrizione dei poligoni nel cerchio. In fatti, se ci vien proposto il seguente

PROBLEMA

Circoscrivere un esagono regolare al cerchio, cominceremo dalla seguente

Operazione. S'iscriva nel cerchio l'esagono regolare ABDE (Fig. 40 bis); indi, abbassate dal centro O, su ciascuno dei sei lati di detto poligono, i raggi dritti, o perpendicolari OH, OM, ON, ec., e, menati dai punti, ove queste incontrano la circonferenza, le sei tangenti E'D', D'C', C'B', B'A', A'F', F'E', sarà la figura A'B'C'D'E'F' un esagono regolare, circoscritto al cerchio.

Dimostrazione. Dimostreremo in primo luogo, che le tangenti E'D', E'F' ec. concorrono scambievolmente nei punti E, F', ec., formando un poligono di sei lati. In fatti congiunti gli estremi F', D' di due tangenti contigue colla retta F'D', si ha, che nei triangoli $pH'D'$, $qT'F'$, gli angoli $pH'D'$, $qT'F'$, sono retti, ed in conseguenza gli altri angoli T'F'D', H'D'F' risultano acuti; perlocchè, presi insieme, sono minori di due angoli retti, e quindi le due linee F'E', D'E', non potranno essere paralelle, ma concorrer debbono in un punto qualunque E', (Lezione XXIV.ª).

Nello stesso modo si dimostrerà, che le rimanenti tangenti convengono scambievolmente, a due a due, in modo che tutte formano una figura chiusa di sei lati, circoscritta al cerchio.

Passiamo ora ad esaminare la natura di tale poligono circoscritto. Congiungasi il centro O coi vertici degli angoli del detto poligono, mediante le linee OA', OB', OC', OD', OE', OF', e si noti, che dal punto E', essendosi menate al cerchio le due tangenti E'H', E'T', una di qua, l'altra di là, queste sono fra loro uguali, giusta il dimostrato nella lezione XXVIII.ª: dippiù è OH'=OT', perchè raggi; non che l'angolo OH'E'=OT'E', perchè retti, in conseguenza è il triangolo OH'E'=OT'E', e l'angolo H'OE'=T'OE', dal che ne risulta essere arco EH'=ET': vale a dire la linea retta OE' passa per la metà dell'arco T'H'.

Or il raggio obliquo OE dell'esagono regolare iscritto, perchè divide per metà l'angolo TOH, ossia T'OH', passa pure per la metà dell'arco T'H'; quindi le due linee OE, OE', coincidono.

Nel modo medesimo si dimostra, che tutt'i rimanenti rag-

gi obliqui del poligono iscritto, formano rispettivamente una sola linea, col corrispondente del poligono circoscritto.

Ciò posto, perchè il raggio OH′ è perpendicolare alla ED, lato del poligono iscritto, ed è perpendicolare benanche alla E′D′, perchè tangente del cerchio alla estremità H′ di detto raggio, perciò le due linee ED, E′D′ sono fra loro paralelle, e quindi, sarà OED=OE′D′. Similmente si troverà essere OEF=OE′F′ e quindi tutto FED=F′E′D′.

Nello stesso modo si proverà, che ciascuno altro angolo del poligono circoscritto è uguale al corrispondente dell'iscritto; e poichè gli angoli del poligono regolare iscritto sono fra loro uguali, tali pure saranno quelli del circoscritto.

Intanto, perchè EF è paralella ad E′F′, i due angoli corrispondenti OEF, OE′F′, sono fra loro uguali: per la ragione medesima è OFE=OF′E′; ma è OEF=OFE, perchè ciascuno è metà di un angolo del poligono iscritto, dunque sarà pure OF′E′=OE′F′; e quindi il triangolo OF′E′ avrà il lato OF′=OE′.

Parimente dimostrandosi che il lato OE′=OD′, si ha che i due triangoli OF′E′, OE′D′, hanno due lati OD′, OE′ rispettivamente uguali ai due lati OE′, OF′; hanno pure l'angolo F′OE′=E′OD′, per essere le rispettive metà fra loro uguali, come sopra si è detto, perciò sarà F′E′=E′D′.

Nel modo istesso si prova, che E′D′=D′C′, ec. perciò risulta che l'esagono circoscritto ha tutti i suoi lati uguali.

Quindi il poligono A′B′C′D′E′F′, essendo di sei lati, ed avendo gli angoli, non che i lati fra loro uguali, esso è un esagono regolare circoscritto, ch'è quanto si domandava di fare.

La suddetta soluzione è applicabile al caso di volersi circoscrivere qualunque altro poligono regolare al cerchio.

Corollari. Dalla soluzione del precedente problema si ricava, che, per circoscrivere ad un cerchio un poligono, fa d'uopo prima iscrivere simile poligono nel cerchio, e quindi, menati i raggi dritti, e prolungati questi sino all'incontro di ciascuno colla periferia, si otterranno su di essa tanti punti, quanti sono i lati del poligono iscritto: da tali punti,

menate le tangenti al cerchio, queste comporranno il poligono circoscritto.

Dunque *al cerchio non si possono circoscrivere, che i poligoni, capaci di essere iscritti.*

Conclusione. Da quanto si è detto finora risulta, che la teorica delle iscrizioni, e circoscrizioni dei poligoni, e de'cerchi, riducesi a soli due generali problemi, cioè.

1.° Dato un poligono regolare, circoscrivergli, ed iscrivergli un cerchio.

2.° Dato un cerchio, iscrivergli, e circoscrivergli un poligono regolare.

Intanto il primo dei detti problemi, come si è di sopra veduto, è capace di una generale soluzione, ma il secondo ammette dei casi particolari, dipendenti dalla natura de'poligoni, come si è pur di sopra osservato.



LEZIONE XXXVI.ª

LINEE PROPORZIONALI.

Le idee date delle ragioni, e proporzioni, nell'Aritmetica, benchè riguardavano le quantità discrete, pure esse sono completamente applicabili alle quantità continue, quali sono le linee.

Definizioni. Quelle figure, che hanno un ugual numero di lati, gli angoli uguali, ed i lati intorno agli angoli uguali, proporzionali, diconsi *figure simili*.

I lati opposti agli angoli uguali si chiamano *omologhi*.

LEMMA

Le linee rette paralelle, come ab, cg, comprese fra due altre linee rette paralelle ac, bg, sono fra loro uguali, Fig. 42.

Dimostrazione. Abbassate da'punti a, c, le perpendicolari sulla bg, prolungata per quanto bisogna, si ha, che gli angoli b, e g perchè corrispondenti delle paralelle, sono fra loro uguali: di più gli angoli apb, cpg, perchè retti, sono benanche fra loro uguali; finalmente la perpendicolare ap è uguale all'altra cp, perchè ambe misurano la medesima distanza fra le paralelle ac, bg; dunque i triangoli apb, cpg, sono fra loro perfettamente uguali; e come tali, danno $ab=cg$, giusta l'enunciato di sopra.

Corollario. Deriva dal già detto, che se due linee rette paralelle ac, bg, sono fra loro tanto discoste, quanto lo sono le due altre paralelle xy, pp; e che le paralelle ab, gc sono tanto inclinate sulle ac, bg, quanto lo sono le paralelle xp, yp sulle xy, pp, sarà

$$ba=cg, \text{ e } xp=yp.$$

TEOREMA

Se due linee rette *ab*, *ac* (Fig. 43.), che s'incontrano ad angolo nel punto *a*, vengono divise da altre linee rette, fra loro paralelle ed equidistanti, come *md*, *mg*, ec. sarà un numero qualunque di parti, in cui rimane divisa *ab*, ad un ugual numero di parti, in cui rimane divisa *ac*, nella ragione medesima, in cui una parte della prima linea, stà alla corrispondente parte della seconda.

Dimostrazione. Menate da'punti *m*, *m*... le perpendicolari *mp*, *mp*... sulle paralelle *mg*, *mf*, ec., non che da'punti *d*, *g*, *f*.... tirate le altre perpendicolari *dp*, *gp*.... sulle paralelle medesime; si avrà, che i triangoli *mpm*, *mpm*... hanno l'angolo $mpm=mpm$, perchè retti, l'altro angolo $mmp=mmp$, perchè corrispondenti delle paralelle *md*, *mg*..., tagliate dalla *ab*; non che il lato $mp=mp$, per che dinotano ambe la uguale distanza fra le paralelle; perciò essi triangoli sono fra loro uguali; e quindi è $mm=mm$.

Similmente si dimostra, che $dg=gf$, ec.

Con raziocinio uguale si troverà, che $am=mm$, e che $ad=dg$, ec.

Ciò posto, si può stabilire la seguente proporzione.

$$am : 3.\, am=ad : 3.\, ad,$$

e permutando, sarà

$$am : ad=3.\, am : 3.\, ad;$$

ed in generale, una parte qualunque di *ab*, come *am*, sta alla corrispondente parte di *ac*, come *ad*, nella medesima ragione, che un numero qualunque di parti della prima, serba ad un ugual numero di parti della seconda: il che è corrispondente al proposto teorema.

Corollario Poichè si è trovato, che

$$am : ad = 3 . am : 3 . ad,$$

sarà pure

$$am : ad = 3 : mm : 3 . dg,$$

giacchè, come si è veduto,

$$am = mm, \text{ e } ad = dg.$$

Or essendo 3 un numero arbitrario, se in sua vece si prende l'unità sarà

$$am : ad = mm : dg, \text{ e permutando sarà}$$
$$am : mm = ad : dg;$$

vale a dire, che *se due linee rette, le quali s'incontrano ad angolo, vengono tagliate da altre linee, fra loro paralelle, ed equidistanti, si avrà, che le parti, in cui rimane divisa una di esse linee, sono rispettivamente proporzionali alle parti, in cui rimane divisa l'altra.*



LEZIONE XXXVII.ª

TEOREMA

Due triangoli, che hanno i lati rispettivamente perpendicolari, sono fra loro equiangoli.

Dimostrazione. Se il triangolo *gfm* (Fig. 44.) ha i suoi lati perpendicolari a quelli dell'altro *abc;* cioè *fg* perpendicolare ad *ac; fm* a *bc*, e *gm* ad *ab;* è chiaro che, facendo girare il triangolo *fgm* intorno al punto *g*, come centro, finchè i punti *f*, ed *m* descrivano un quarto di circonferenza, si avrà, che il lato *gf* si distenderà su di *gf'*, il quale, dall'essere perpendicolare, risulterà paralello ad *ac*. Nello stesso modo *gm*, prendendo la posizione di *rm'*, risulterà paralella a *ba;* ed *fm*, disteso su di *f'm'*, risulterà paralello a *bc*. Vale a dire, che il triangolo *fgm*, prenderà la posizione *f'gm'*.

Ora, per le paralelle *bf', rm'*, tagliate dalla linea *ac*, si ha, che *bac*=*arm'*, come angoli alterni; ma, per le paralelle medesime, *arm'*=*f'gm'*, perchè angoli corrispondenti; dunque sarà *bac*=*f'gm'*.

Similmente, per le paralelle *bm, f'm'*, si ha, che *f'mb*=*mf'm'*, perchè angoli alterni, ma è *f'mb*=*acb*, perchè corrispondenti delle paralelle *f'm, ac*, dunque sarà *acb*=*mf'm'*, ossia *gf'm'*. Quindi i due triangoli *bac, f'gm'*, avendo i due angoli *bac, acb* rispettivamente uguali ai due angoli *f'gm', gf'm'*, sarà il terzo angolo *abc* uguale ad *f'm'g*, e quindi i detti triangoli sono equiangoli. Ma il triangolo *f'gm'*, non è che il triangolo *fgm*, cambiato di posizione, dunque saranno equiangoli anche i due triangoli *abc, fgm*, come si è di sopra annunziato.

Corollario. Poichè i due triangoli, nel precedente teorema considerati, e che avevano i lati rispettivamente perpendicolari, gli uni agli altri, per effetto del movimento intorno al punto *g*, sono risultati essi lati paralelli, si può, come principio generale, ritenere, che *i triangoli, i quali hanno i lati rispettivamente paralelli sono pure equiangoli*.

TEOREMA

I triangoli equiangoli, (Fig. 45.) *abc*, *dfg*, sono simili.

Dimostrazione. Si adatti il triangolo *fdg* sull'altro *abc*, in modo, che il punto *d* cada sul punto *a*, e il lato *df* si distenda su di *ab*; poichè si è supposto l'angolo $a=d$, perciò la *dg* si distenderà su di *ac*. Or tagliata $as=df$, e $ap=dg$; non che tirata *sp*, si ha che il triangolo $asp=dfg$, e quindi $s=f$, e $p=g$: ma per supposizione si ha $f=b$, e $g=c$, dunque sarà pure $s=b$, $p=c$.

Ciò posto, le due linee rette *sp*, *bc*, venendo tagliate dalla terza *ab*, ed avendo gli angoli corrispondenti *b*, ed *s*, uguali fra loro, esse sono parelelle, in conseguenza di che, per la precedente Lezione, si ha $ba : ac=as : ap$; ma è $as=df$, e $ap=dg$, dunque sarà $ba : ac=df : dg$.

Similmente, se si accavallava il triangolo *fdg* su di *abc*, in modo che il punto *f* cadeva sul punto *b*, si sarebbe pur ottenuto, con raziocinio uguale, $ab : bc=fd : fg$; ed in fine accavallando detti triangoli l'uno all'altro, in modo che il punto *g* cade sul punto *c* si ha $cb : ca=fg : gd$.

Vale a dire, i due triangoli dati hanno i lati, intorno agli angoli uguali, proporzionali, e quindi sono simili.

Corollari. Essendosi precedentemente dimostrato, che i triangoli, i quali hanno i lati perpendicolari, ciascuno a ciascuno, o pur paralelli, sono equiangoli, ne risulta ch'essi triangoli sono pure simili.

Si ricava inoltre, che i due triangoli *asp*, *abc*, che hanno l'angolo *a* comune, e le basi *bc*, *sp* fra loro paralelle, sono equiangoli, e simili.

TEOREMA

I triangoli, come *abc*, *fdg*, i quali hanno un'angolo $a=d$, ed i lati, che comprendono detti angoli, proporzionali, ossia $ab : ac=df : dg$, essi sono simili.

Dimostrazione. Prendasi sulla ab la parte $as=df$, si tiri sp paralella a bc. Per le cose dette, sarà il triangolo asp simile al triangolo abc.

Intanto, perchè si è supposto $ab : ac=df : dg$; e perchè si è tagliata $as=df$, sarà pure

$$ab : ac=as : dg.$$

Ma, a causa delle paralelle sp, bc, che son state menate fra le due linee ab, ac, messe ad angolo, si ha che
$ab : ac=as : ap$; perciò le due ragioni $as : dg$, e $as : ap$, essendo uguali alla terza ragione $ab : ac$, saranno pure fra loro uguali ossia sarà

$as : dg=as : ap$; e permutando, sarà
$as : as=dg : ap$. Ma è $as=as$; dunque sarà pure $dg=ap$.

Or i due triangoli asp, dfg, hanno l'angolo $a=d$, per supposizione, non che i lati as, ap, rispettivamente uguali a' lati df, dg, perciò detti triangoli sono fra loro uguali: ma il triangolo asp è simile ad abc, dunque sarà anche dfg simile al triangolo abc, come in principio si è detto.

TEOREMA

Due triangoli, come abc, dfg, i quali hanno i lati rispettivamente proporzionali, ciascuno, a ciascuno; sono simili.

Dimostrazione. Imperciocchè, fatto colla fg, l'angolo $gfh=b$, e l'altro $fgh=c$, risulta il rimanente $a=h$. Quindi i due triangoli abc, fgh, essendo equiangoli, sono simili. Intanto, per supposizione i due triangoli abc, dfg, hanno i lati rispettivamente proporzionali, vale a dire
$bc : ba=fg : fd$; e per la simiglianza de' due triangoli abc, fgh, si ha
$bc : ba=fg : fh$; dunque le due ragioni $fg : fd$, e $fg : fh$, es-

sendo ambe uguali alla terza ragione $bc : ba$, sono fra loro uguali, e quindi

$$fg : fd = fg : fh; \text{ e permutando,}$$
$$fg : fg = fd : fh, \text{ ma } fg = fg, \text{ dunque anche } fd = fh.$$

Inoltre si ha, per supposizione, che $bc : ac = fg : gd$; e la simiglianza de' due triangoli abc, fhg, dando

$$bc : ac = fg : gh; \text{ perciò sarà}$$
$$fg : gd = fg : gh, \text{ e permutando}$$
$$fg : fg = gd : gh, \text{ ed in conseguenza } gd = gh.$$

Or i due triangoli dfg, fgh, hanno i due lati fd, dg, rispettivamente uguali a' due lati fh, hg, il lato fg comune, dunque sono fra loro uguali. Ma si è dimostrato di sopra, che il triangolo fgh è simile ad abc, dunque anche fdg sarà simile ad abc, come si è in principio detto.



LEZIONE XXXVIII.

TEOREMA

Se una linea retta, come *ap* (Fig. 46.) divide per metà l'angolo *bac* del triangolo qualunque *abc*, essa dividerà il lato *bc*, opposto al detto angolo, in due parti *bp*, *pc*, proporzionali ai rimanenti lati *ab*, *ac*.

Dimostrazione. Tirata la *bd* paralella alla *pa*, e prolungato il lato *ca*, finchè incontra la *bd* in *d*, si ha che nel triangolo *cdb*, essendosi tirata *ap* paralella a *db*, i due angoli *cap*, *cdb*, sono fra loro uguali, perchè corrispondenti di dette paralelle. Ma, per supposizione è l'angolo $cap=bap$, ed è pure l'angolo $bap=dba$, perchè alterni delle dette paralelle, che vengono tagliate dalla retta *ba*; perciò sarà l'angolo $abd=adb$, ed in conseguenza $ad=ab$.

Or perchè nel triangolo *dcb* si è tirato la *pa* paralella a *db*, perciò che si è detto precedentemente si ha $bp:pc=da:ac$, ma si è trovato poco fa essere $da=ab$, dunque sarà $bp:pc=ba:ac$, che è quanto dovevasi dimostrare.

TEOREMA

Se due corde, come *ab*, *fg* (Fig. 47.) si tagliano in un cerchio *agbf*, le parti in cui rimane divisa una di esse, sono inversamente proporzionali alle parti, in cui rimane divisa l'altra: vale a dire sarà $ac:gc=fc:bc$ (1).

Dimostrazione. Tirate le congiungenti *ag*, *fb*, si ha che i due triangoli *acg*, *fcb*, hanno i due angoli in *c* fra loro uguali, perchè opposti al vertice; dippiù è l'angolo $a=f$,

(1) La proporzione, fatta con ragioni dirette fra le parti in cui dette linee sono divise, sarebbe $ac:cb=fc:cg$, e permutando, diviene $ac:fc=cb:cg$. Volendo quindi considerare dette ragioni una inversa dell'altra, come il presente teorema si propone dimostrare, la proposizione suddetta diviene $ac:fc=cg:cb$, e permutando di nuovo, $ac:cg=fc:cb$.

perchè poggiati sullo stesso arco gb, dunque è il rimanente angolo $g=b$; ed in conseguenza i detti triangoli, essendo equiangoli, saranno simili, e quindi i lati, intorno agli angoli uguali, fra loro proporzionali: vale a dire sarà $ac : cg = fc : cb$, come si è di sopra detto.

Corollari. Siegue dal precedente teorema, che se delle due corde, che si togliano nel cerchio, una di esse passa pel centro, come ab (Fig. 48), e l'altra fg gli è perpendicolare, per lo dimostrato nella Lezione XXVI.ª sarà $fc=cg$; ed in questo caso la proporzione, dimostrata nel precedente teorema darà $ac : fc = fc : cb$: vale a dire, *ogni perpendicolare, che da un punto della periferia si abbassa sul diametro, è media proporzionale fra le due parti, in cui esso diametro viene dalla perpendicolare diviso.*

E poichè in ogni triangolo rettangolo può considerarsi l'ipotenusa come il diametro del cerchio, che passa pe'suoi tre vertici, come appunto osservasi nel triangolo afc, perciò è da concludersi, che *ogni perpendicolare, che dal vertice di un triangolo rettangolo, si abbassa sulla ipotenusa, è media proporzionale fra i due segmenti di essa.*

PROBLEMA

Date due linee rette qualunque, come x, n, trovare fra esse la media proporzionale.

Operazione. Si aggiungano le date linee x, n nel punto c, in modo, che nel loro prolungamento formino una sola linea retta ab: questa si divida per metà in p; e col centro p, e raggio pa, si descriva il cerchio afb: indi dal punto c, ove le due date linee si congiungono, si elevi la perpendicolare cf, che si prolunghi sino all'incontro della periferia. Sarà cf la media proporzionale cercata.

Dimostrazione. Poichè la ba passa pel centro, e la cf gli è perpendicolare, pel teorema precedente, sarà

$ac : cf = cf : cb$, il che mostra essere cf media proporzionale fra le due rette ac, cb, ossia fra x, ed n.

TEOREMA

Se dal vertice *f* di un triangolo rettangolo, come *afb* (Fig. 48), si abbassa la perpendicolare *fc* sulla ipotenusa *ab*; il triangolo suddetto rimarrà diviso in due altri triangoli rettangoli *acf*, *bcf*, ogn'uno simile all'intiero triangolo, e quindi essi simili fra loro.

Dimostrazione. Poichè i due triangoli *acf*, *abf*, hanno l'angolo $acf = afb$, perchè retti; l'angolo *a* è comune ad essi triangoli, perciò sarà il terzo angolo $afc = fba$; quindi i detti triangoli sono equiangoli, e simili.

Nel modo medesimo, paragonando il triangolo *afb* all'altro *cfb*, si troverà, che essi sono benanche equiangoli, e quindi simili, il che bisognava dimostrare.

Corollario. Per la dimostrata simiglianza de' due triangoli *afc*, *afb*, e per la definizione delle figure simili, si ha

$$ac : af = af : ab.$$

Similmente, perchè sono simili i due triangoli *afb*, *fcb*, si ha $bc : bf = bf : ba$: vale a dire, che *af* è media proporzionale fra *ac*, ed *ab*, come lo è *bf* fra *bc*, e *ba*. Generalizzando quindi questo risultato, si può ritenere il principio, che *ciascun lato di triangolo rettangolo è sempre medio proporzionale fra la ipetenusa, e'l segmento, che è adjacente al detto lato, quando dal vertice del triangolo viene abbassata la perpendicolare sulla base.*

TEOREMA

Se da un punto, preso fuori la periferia del cerchio, si tirano, alla parte concava di essa, due secanti, come *ab*, *ac* (Fig. 49), queste sono fra loro nella ragione inversa delle parti, che rimangono fuori della periferia: vale a dire sarà $ab : ac = ad : af$.

Dimostrazione. Congiunte le corde *cf*, *bd*, si ha che i triangoli *adb*, *afc*, avendo l'angolo *a* comune, l'angolo $b = c$, perchè poggiano sul medesimo arco di cerchio *fd*, essi sono equiangoli, e perciò simili; in conseguenza i lati omologhi saranno nella seguente proporzione.

$ab : ac = ad : af$, come si è enunciato.

Corollario. Se l'arco *cd* diviene zero, i punti *c*, *d*, si uniranno in un solo, e la secante *ac* diventerà tangente come *ad* (Fig. 50) : in conseguenza la cennata proporzione si cambierà nell'altra

$ab : ad = ad : af$. Vale a dire, che *la tangente è sempre media proporzionale tra la secante che si mena da un punto di essa, e la parte della secante medesima, che rimane fuori la periferia.*



LEZIONE XXXIX.

Il modo vario, in cui si può concepire divisa in una linea retta, ha richiamata l'attenzione de' Geometri, e la legge dei rapporti è stata sufficiente, per determinare le idee, che sù di un tal soggetto si sono concepite. Primieramente si è avuto luogo di riconoscere, che fra le tante maniere, in cui una linea retta può rimanere divisa in un punto, avvene una marcatissima, cioè quella, che dà una delle due sue parti media proporzionale fra la data linea retta, e la rimanente porzione: questa divisione vien detta dai Geometri *in estrema, e media ragione*. Onde daremo in primo luogo la soluzione del seguente

PROBLEMA

Data una linea retta ab, (Fig. 51), dividerla in modo nel punto d, che le sue parti siano, con la linea data, in estrema, e media ragione; vale a dire

$$ab : ad = ad : bd.$$

Operazione. Si divida la data retta per metà; indi dal suo estremo b, s'innalzi su di essa la perpendicolare bo, che sia uguale alla metà della stessa retta: centro o, raggio ob, si descriva il cerchio cbf; si congiunga l'altro estremo a, della retta data, col centro o, e la congiungente ao si protragga fino all'incontro della periferia in c: finalmente si tagli dalla data retta la parte $ad = af$. Dico rimanere nel punto d, divisa la ab in estrema, e media ragione.

Dimostrazione. Poiche si è fatto ob perpendicolare ad ab, sarà ab tangente al cerchio, ed in conseguenza, pel corollario precedente, sarà

$ac : ab = ab : af$; ma è $af = ad$, dunque sarà

$ac : ab = ab : ad$; e dividendo si avrà

$ac - ab : ab = ab - ad : ad$; ma essendo ob uguale alla

metà di *ab*, sarà il doppio di *ob*, ovvero il diametro $cf=ab$, quindi la suddetta proporzione si cangerà nell'altra

$ac-cf : ab=ab-ad : ad$, ossia

$af : ab=db : da$; ma è $af=ad$, dunque sarà

$ad : ab=db : ad$, ed invertendo sarà

$ab : ad=ad : db$, quindi la *ba* è stata in *d* divisa in estrema e media ragione.

PROBLEMA

Data la linea retta *ab* (Fig. 52) indivisa, e l'altra *ac*, divisa in parti, si vuole dividere la prima in ugual numero di parti, e proporzionali a quelle, in cui è divisa *ac*.

Operazione. Si mettino le date linee rette ad angolo in *a*, e si congiungano gli estremi *c*, e *b* di esse, colla *cb*: dai punti in cui trovasi divisa *ac*, si tirino le linee *xd*, *pf*... paralelle alla *cb*. Queste divideranno la linea *ab* nello stesso numero di parti in cui è divisa la *ac*, ed a queste proporzionali.

Dimostrazione. Essendosi fra le linee *ac*, *ab*, tirate le paralelle *xd*, *pf*,... è chiaro che il numero delle parti *ad*, *df*, ec. in cui rimane divisa *ab* è corrispondente a quello delle parti *ax*, *xp*, ec. in cui è divisa *ac*. E poichè per effetto delle medesime paralelle si ha, che $ax : xp = ad : df$ non che, si ha $df : fg = xp : pq$, ec. rimane così dimostrato il detto di sopra.

PROBLEMA

Data una linea retta *ad*, dividerla in un dato numero di parti, che siano fra loro uguali (Fig. 53).

Operazione. Per un punto qualunque *b*, preso fuori della *ad*, si meni alla medesima una paralella *bc*, che sia maggiore di *ad*. Prendansi sulla *bc*, col compasso, tante parti uguali, quante sono quelle, in cui si vuol dividere la data *ad*. Ciò posto, si congiunghino i punti *b*, *c*, con gli estremi *a*, e *d* della data retta, mercè le *ba*, *cd*, le quali, prolungate, si anderanno ad unire in *x*, e ciò per essersi fatta $bc > ad$.

Finalmente dal punto x si tirino le linee rette xp, xm, xn... ai punti p, m, n... in cui bc è stata divisa: dico che le divisioni ao, oi, is,...... che queste linee marcano su di ad, sono parti fra loro uguali, e del numero voluto.

Dimostrazione. Poichè nel triangolo xbp si è tirata ao paralella alla bp, detto triangolo rimane diviso negli altri due xbp, xao, simili fra loro; ed in conseguenza sarà

$$bp : ao = px : ox.$$

Nello stesso modo ragionando, si avrà, per la simiglianza dei triangoli xpm, xoi

$pm : oi = px : ox$; in conseguenza le ragioni di $bp : ao$ e di $pm : oi$, essendo uguali ambe a quella di $px : xo$, saranno fra loro uguali, e quindi

$bp : ao = pm : oi$, e permutando $bp : pm = ao : oi$.

Ma si è fatta $bp = pm$, dunque sarà pure $ao = oi$.

Nello stesso modo si dimostrerà essere $oi = is$, ec.: quindi tutte le parti, in cui si è divisa ad, saranno fra loro uguali, e del numero voluto, perchè corrispondenti alle parti di bc.

PROBLEMA

Date tre linee rette a, b, c, trovare, in ordine alle medesime, una quarta linea proporzionale, (Fig. 54).

Operazione. Mettansi due linee rette indefinite pr, ps, ad angolo in p: si tagli sulla pr, la parte $px = a$, e, sulla ps, la $pg = b$; si congiunga la gx, e tagliando sulla pr, l'altra parte $xo = c$, si tiri, dal punto o, la oq, paralella ad xg. Sarà gq quarta proporzionale in ordine ad a, b, c.

Dimostrazione. Poichè si ha $px : xo = pg : gq$, ed essendosi fatte le linee px, xo, pg, rispettivamente uguali alle date a, b, c; dunque la gq è quarta proporzionale in ordine ad esse linee, ossia sarà $a : b = c : gq$ (1).

(1) Pria di terminare la teorica delle linee proporzionali, crediamo utile qui dare il modo come *trovare di due date linee rette la loro comune misura*,

LEZIONE XL.ª

POLIGONI SIMILI.

Nella XXXVI.ª lezione si è data la definizione delle figure simili: apprenderemo nella presente il rapporto, che hanno fra loro i poligoni simili.

o il rapporto approssimativo fra esse. E senza escire dalla regola generale data in Aritmetica, per rinvenire il massimo e comune divisore di due numeri dati, ecco come risolveremo la presente quistione.

$$\begin{cases} a \quad | \quad | \quad e\,|\,g\,|\,b \\ c \quad f\,|\,|\,|\,d \end{cases}$$

Sieno *ab, cd* le due date rette, portisi la minore *cd* sulla maggiore *ab* tante volte quante potrà esservi contenuta; per esempio tre volte da *a* in *e*, con un resto *eb*; avrassi così $ab=3cd+eb$.

Portisi in seguito su *cd* il resto *eb*, e sia per esempio contenuto quattro volte, con un resto *fd*; sarà perciò $cd=4eb+fd$.

Portisi questo secondo resto *fd* su di *eb*, e siavi contenuto una volta da *e* in *g*, con il resto *gb*; sarà

$$eb=fd+gb.$$

In fine portando *gb* su di *fd*, trovisi contenuta tre volte, sarà in tal modo

$$fd=3gb.$$

Or risalendo dal valore di *fd* a quello di *eb*, da questo a quello di *cd*, e da questo a quello di *ab*, troveremo successivamente

$$fd=3gb,\ eb=4gb,$$
$$cd=19gb,\ ab=61gb:$$

vale a dire l'ultimo resto *gb* è la comune misura delle rette *ab, cd*. E siccome il detto resto è contenuto 61 volte nella *ab*, e 19 volte nella *cd*, ne segue, che tali linee rette sono tra loro nella ragione di 61 : 19.

Questo metodo è applicabile a qualunque esempio: il paragone de' resti consecutivi dev'essere spinto fino a che se ne trovi uno che sia contenuto un esatto numero di volte in quello che lo precede, o che sia tale, che il resto che potrebbe lasciare in tale operazione, per la sua picciolezza sfugga a' nostri sensi. In tal maniera arriverassi sempre ad un risultato, almeno approssimativo.

TEOREMA

Due poligoni simili si possono dividere, col mezzo delle linee, tirate da' vertici degli angoli uguali a' loro rispettivi opposti, in un ugual numero di triangoli simili.

Dimostrazione. Siano i due poligoni simili *abcdf*, *ghilm*, (Fig. 55) e si tirino da punti *a*, e *g*, vertici de' due angoli uguali, le diagonali *ac*, *ad*, *gi*, *gl*. Nei due triangoli *afd*, *gml*, si ha, che gli angoli *f*, ed *m*, sono fra loro uguali, per essersi supposto i due dati poligoni simili: per la ragione medesima si ha che i lati, che comprendono detti angoli sono proporzionali, e quindi essi triangoli sono simili; dal che si deduce

$$fd : ml = ad : gl.$$

Intanto, per la simiglianza de' poligoni, si ha pure $fd : ml = dc : li$; sarà dunque $ad : gl = dc : li$, e permutando $ad : dc = gl : li$. Ciò posto, poichè i poligoni sono simili, si ha, che angolo $d = l$; e per la simiglianza de' triangoli *afd*, *gml*, si ha angolo $adf = glm$; dunque sarà pure ang. $adc = gli$: vale a dire, i due triangoli *adc*, *gli*, hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati intorno a tali angoli proporzionali, e quindi sono simili. Nello stesso modo si dimostra che i rimanenti triangoli *abc*, *ghi*, sono simili fra loro, e con ciò rimane dimostrato il presente teorema.

Corollari. Perchè i due poligoni, *p*, *x*, sono simili, i lati intorno agli angoli uguali, sono fra loro proporzionali, vale a dire si ha

$$af : gm = fd : ml :$$

per la medesima ragione è pure

$$fd : ml = dc : li, \text{ non che } dc : li = bc : hi;$$

vale a dire, le ragioni

$$af : gm$$
$$fd : lm$$
$$dc : li$$
$$cb : ih$$

sono tutte tra loro uguali, e per la Lezione XVI.ª sarà

$$af+fd+dc+cb : gm+lm+li+ih=af : gm: \text{ ma}$$

$af+fd+dc+cb$, compongono l'intiero poligono p, come pure $gm+lm+li+ih$, compongono l'intiero poligono x; dunque sarà $p : x=af : gm$: vale a dire, *i poligoni simili sono fra loro nelle ragioni de' lati omologhi.*

TEOREMA

I perimetri di due poligoni regolari simili, sono fra loro come i rispettivi raggi dritti, od obbliqui; ossia come i raggi de' cerchi circoscritti ad essi.

Dimostrazione. Poichè i raggi obliqui oa, rs (Fig. 56), dividono gli angoli uguali a, ed r, per metà; ed a causa degli angoli retti x e p, i triangoli rxs, aop, hanno i due angoli p, e x uguali fra loro, come lo sono pure gli angoli pao, srx, quindi il rimanente angolo sarà uguale al rimanente angolo, ed essi triangoli saranno equiangoli, e simili; per la qual cosa sarà

$$rs : oa=sx : op=rx : pa.$$

Ma è rx metà di rn, e pa metà di ag, ed essendo le metà proporzionali a' rispettivi intieri (1) sarà perciò

$$rs : oa=sx : op=rn : ag.$$

(1) Che la ragione delle metà è come quella de' rispettivi intieri, si vede da sè; imperocchè, se a, e b son due grandezze omogenee, lè loro metà $\frac{a}{2}$, e $\frac{b}{2}$ messe in proporzione con le prime darebbero $a : b=\frac{a}{2} : \frac{b}{2}$; ma di questi quattro termini il prodotto degli estremi $a\frac{b}{2}=$ quello de' termini medi $\frac{a}{2}\,b$, dunque la proporzione $a : b=\frac{a}{2} : \frac{b}{2}$ è sussistente.

Or le due rn, ag, essendo lati omologhi de' due poligoni, essi sono fra loro come i poligoni rispettivi, ossia

$rn : ag =$ poligono : poligono, e quindi sarà

$rs : oa = sx : op =$ poligono : poligono, giusta l'enunciato teorema.

Corollario. Poichè le circonferenze de' cerchi si possono considerare come poligoni regolari di un infinito numero di lati, perciò è che due circonferenze di cerchi si considerano sempre figure simili, dal che si ricava che *le circonferenze circolari sono nella ragione de' rispettivi raggi, o de' diametri* (1).

Il rapporto costante del diametro alla circonferenza viene in Geometria designato da $1 : \pi$, e si usa per ottenere lo sviluppo della periferia di un cerchio, quando è noto il raggio, e viceversa. Così volendosi conoscere lo sviluppo della periferia del cerchio c, il cui raggio è r, si farà

$$1 : \pi = 2\,r : c, \text{ e quindi } c = 2\,\pi\,r.$$

(1) I Geometri si sono molto occupati a determinare il rapporto della circonferenza al diametro, quale non si può ottenere, che per approssimazione, da poichè approssimativa è l'idea di considerare la periferia del cerchio come un poligono di moltissimi lati.

Il mezzo migliore usato per giungere ad un tale scopo, fu quello di operare molte iscrizioni, e circoscrizioni di poligoni al cerchio, e con ciò si ottennero due serie di numeri; quella, cioè, esprimenti i poligoni iscritti, e l'altra i poligoni circoscritti; i numeri della prima serie più piccoli e quelli della seconda più grandi della periferia, che forma il limite di tali serie; di modo che, arrestando le dette serie al punto, in cui le differenze, che esse marcano dalla periferia circolare, è minore della quantità, che si vorrà tenere come trascurabile, si giungerà al desiderato fine.

Un tal calcolo però è incompatibile colla presente nostra istituzione, e basterà qui notare, che Archimede, usando tal metodo, e fermandosi a' poligoni di 96 lati, giunse a determinare il rapporto approssimativo del diametro alla circonferenza, come 7 : 22.

Pietro Mezio pur colcolò un tale rapporto: e lo fissò come 113 : 355, quale, valutato in decimali, dà l'espressione 3,1415929.

Alcuni dotti inglesi, stazionati nelle Indie, fecero conoscere un rapporto più approssimativo del precedente, qual'è quello di 3927 : 1250, e che si legge nell'*Ayeen Akbery*, opera Persiana: tale rapporto dipende dal poligono 768 lati.

LEZIONE XLI.ª

MISURE, E RAPPORTI DELLE SUPERFICIE.

Definizioni. È *superficie piana* quella estensione in lunghezza e larghezza, che non offre alcuna gonfiagione, o infossamento, e sopra la quale può essere adattata esattamente, ed in tutti i sensi, una linea retta.

È *superficie curva* quella, su cui una linea retta non può essere esattamente adattata in tutt'i sensi: tal è la superficie di un globo.

Un quadrilatero *abcd* (Fig. 57), che ha soli due lati paralelli, come *ab*, *cd*, dicesi *trapezio*. Ma se ha tutt'i quattro lati paralelli, a due a due, dicesi *paralellogrammo*, come *abdc* (Fig. 59). Quando i lati di un paralellogrammo sono uguali, senza avere gli angoli retti, esso prende il nome di *rombo;* che se poi sono uguali i soli lati opposti, prenderà il nome di *romboide*.

Se gli angoli di un paralellogrammo sono retti, esso dicesi rettangolo, quale appunto è *abcd* (Fig. 60); ma se con gli angoli retti, ha pure tutti i lati uguali, in questo caso si dirà *quadrato*, come *abcd* (Fig. 61).

La linea retta menata dal vertice di un angolo all'opposto corrispondente in un quadrilatero o poligono qualunque, dicesi *diagonale;* tale si è la *bc* (Fig. 57, 59, 61).

Il lato di una figura, su cui s'intende essa poggiare dicesi *base*, come appunto si è la *cd* (Fig. 57).

Quella perpendicolare, che dal vertice di un angolo *a* si mena sulla base *cd* (Fig. 62) prolungata, se fa bisogno, chiamasi *altezza*, come appunto dicesi la *ap* del triangolo *acd*. Di un trapezio, o di un paralellogrammo, l'altezza è la perpendicolare che si mena fra i suoi due lati paralelli, come la *pm* (Fig. 57, 59). È da per sè chiaro, che l'altezza del rettangolo, e del quadrato, è sempre uno dei suoi lati.

PROBLEMA

Formare un paralellogrammo, il quale abbia uno dei suoi lati uguale ad una linea retta data a, l'altro uguale alla linea retta b, e l'angolo, compreso da tali lati, uguale ad un angolo dato g (Fig. 63).

Operazione. Tirisi una linea retta qualunque, dalla medesima taglisi la parte $cd=a$; indi al punto c di essa linea si formi l'angolo $acd=g$. Taglisi $ac=b$, e dal punto a si tiri la linea retta ab paralella, ed uguale alla cd. In fine, congiunto il punto b col punto d, mediante la bd, sarà $abcd$ il richiesto paralellogrammo.

Dimostrazione. Poichè il paralellogrammo $abcd$ ha l'angolo $acd=g$, per costruzione, il lato $cd=a$, ed $ac=b$, dunque il paralellogrammo suddetto è tale, quale si desiderava.

Corollario. Se l'angolo dato g sarà retto, il paralellogrammo sarà un rettangolo; dappoichè gli angoli interni c, d, dalla stessa parte delle paralelle ac, db, essendo insieme presi, uguali a due retti, se uno di essi è retto, l'altro sarà benanche tale. Per la ragione medesima è retto l'angolo a, e l'angolo b, e quindi la figura, giusta la definizione, sarà un rettangolo.

Che se inoltre i lati dati fossero fra loro uguali, la figura sarebbe un quadrato, dappoichè tutt'i lati di essa figura risulterebbero benanche uguali. E poichè si è precedentemente dimostrato, che le linee paralelle, tirate fra due altre benanche paralelle, sono fra loro uguali, così si può ritenere il seguente principio, cioè, *i lati opposti di un paralellogrammo sono fra loro uguali.*

TEOREMA

La diagonale bc divide il paralellogrammo in due triangoli uguali.

Dimostrazione. Poichè $ab=cd$, e $bd=ac$, come si è pre-

cedentemente detto; non che essendo la *bc* comune ai due triangoli *bac*, *bdc*, questi triangoli sono fra loro uguali.

Corollario. Dal precedente teorema si ha, che *ogni triangolo è sempre la metà del parallelogrammo, che ha la sua stessa base, e la stessa sua altezza.*

TEOREMA

Un paralellogrammo, ed un rettangolo, i quali hanno la stessa base, e la medesima altezza, sono fra loro uguali in superficie.

Dimostrazione. Sia il paralellogrammo *abcd*; se dagli estremi *a*, e *b*, del lato *ab*, si abbassano sulla base *cd* prolungata, le perpendicolari *ap*, *bp*, si avrà che *abpp* sarà un rettangolo, avente col paralellogrammo uguali basi, ed altezze, come ora dimostreremo. Infatti i triangoli *acp*, *bdp*, hanno angolo $p=p$, perchè retti, angolo $acd=bdp$, perchè corrispondenti dalla stessa parte delle paralelle, il lato $ac=bd$, perchè opposti del paralellogrammo, dunque essi triangoli sono uguali, ed in conseguenza $cp=dp$, ed $ap=bp$. Ciò posto, è facile osservare, che essendo $cp=pd$ sarà pure $cp+pd=pd+dp$ ossia $cd=pp$: vale quanto dire le basi del paralellogrammo, e del rettangolo sono fra loro uguali; ma si è pur trovato pocanzi essere $ap=bp$, dunque anche le altezze delle dette due figure sono fra loro uguali, come di sopra si è detto.

Intanto, per ottenersi il rettangolo *abpp*, è sufficiente di aggiungere al paralellogrammo *acdb* il triangolo *bdp*, togliendo nello stesso tempo l'altro triangolo *acp*; ma si è trovato essere il triangolo aggiunto *bdp* uguale all'altro, che si è tolto *acp*, dunque lo spazio, che le dette figure racchiudono, è sempre lo stesso, vale a dire, esse figure sono in superficie fra loro uguali.



LEZIONE XLII.ª

TEOREMA

La superficie di un rettangolo è uguale al prodotto della base per la sua altezza.

Dimostrazione. Suppongasi la base *cd* (Fig. 64) del rettangolo *abcd*, essere di 6 piedi, e la sua altezza *ac* di 4 piedi. Segnate su di *cd* le sei divisioni, ognuna corrispondente ad un piede, e sulla *ac* quattro divisioni medesime, si tirino, per ciascuna delle prime, le paralelle ad *ac*, e per ciascuna delle seconde le paralelle alla *cd*. Si avrà così il rettangolo diviso in quattro porzioni, come *pcdp*, ognuna delle quali contiene sei quadrati, come *pcoo*, uguali fra loro, i di cui lati ognuno vale un piede: in questo modo adunque tutto l'indicato rettangolo si troverà ripartito in 24 quadrati, ognuno avente ciascun lato di un piede, ma 24 è il prodotto del 6 moltiplicato per 4, dunque rimane dimostrato l'enunciato teorema.

Corollari. Essendo il quadrato un rettangolo, che ha tutt'i lati uguali fra loro, perciò si otterrà la superficie di esso col prodotto di uno dei suoi lati, moltiplicato per se stesso.

Inoltre essendosi nella precedente lezione dimostrato, che ogni paralellogrammo è uguale ad un rettangolo, che ha uguale base ed altezza con esso paralellogrammo, perciò è da ritenersi, che *la superficie di un paralellogrammo si ottiene col prodotto della sua base per l'altezza.*

E poichè nella medesima lezione si è pur dimostrato, che ogni triangolo è metà del paralellogrammo, che ha la stessa base, ed altezza di esso triangolo, perciò *la superficie di un triangolo si ottiene col prodotto della metà della base per l'altezza, o viceversa.*

In fine, per le cose dette, è da sè chiaro, che *ogni triangolo è uguale in superficie a quel paralellogrammo, che ha la*

stessa sua base, e l'altezza metà di quella del triangolo, o viceversa.

TEOREMA

La superficie di un trapezio *bacd* (Fig. 57) si ottiene col prodotto della sua altezza *mp*, per la metà delle due basi parallele *ab*, *cd*.

Dimostrazione. Tirata la diagonale *bc*, si ha, che il dato trapezio rimane diviso nei due triangoli *abc*, *cdb*, i quali hanno la stessa altezza *mp* del trapezio, dappoichè tanto i detti triangoli, quanto il trapezio, sono compresi fra le medesime parallele *ab*, *cd*. Quindi si avrà superfi. del trian. $abc = \frac{ab}{2} . mp$,

e superfi. del trian. $bcd = \frac{cd}{2} . mp$; ma trian. abc + trian. bcd = trapezio; dunque sarà

superfi. trapez. $abcd = mp . \frac{ba}{2} + mp . \frac{cd}{2} = mp \left(\frac{ba}{2} + \frac{cd}{2}\right)$,

come si è annunziato in principio (1).

(1) Questo teorema dà il modo di calcolare la superficie racchiusa da una curva qualunque, come *axb* (Fig. 65). In fatti, tirata la linea retta *Ax*, e divisa questa in parti uguali piccolissime, da ciascun punto di divisione s'innalzino alla detta *Ax* le perpendicolari *pp*, *pp*..... In tal modo gli archetti picciolissimi *ap*, *pp*..... si potranno prendere, senza sensibile errore, per linee rette, quindi la superficie *axb* rimarrà divisa in tanti piccoli trapezii, dei quali il *pxp* avrà per basi la *pp*, e 'l punto *x*, ossia una delle basi di detto trapezio è uguale a zero. Or, calcolando la superficie di ciascun trapezio, come nel precedete teorema si è dimostrato, si avrà, che ciascuna base *pp* dovrà essere calcolata due volte, dappoichè ciascuna appartiene a due trapezii contigui, meno che la base *ab*, che chiude la figura, la quale vien calcolata una sol volta, perchè appartiene solamente all' ultimo trapezio. Dovendosi quindi nel calcolo della superficie intera, composta dai parziali trapezii, prendere la metà di tutte le basi, questa si avrà unendo in una somma, la metà di *ab*, e tutte le intiere rimanenti altre intermedie; una tal somma, moltiplicata per la comune altezza *xn*, ci darà la superficie richiesta *axb*.

Con questo metodo si potrà agevolmente misurare la superficie, che a fior d'acqua, racchiudono i bordi di un vascello.

TEOREMA

La superficie di un poligono regolare si ottiene col prodotto del suo perimetro per la metà di un raggio dritto.

Dimostrazione. Sia *abdfgh* (Fig. 38) un poligono regolare; e poichè tali poligoni si compongono di tanti triangoli uguali, quanti ne sono i lati; e ciascun triangolo, come *ahc* essendo uguale in superficie al prodotto della propria base *ah*, per la metà dell'altezza *cq*, così, riunendo tutt'i triangoli, che compongono il poligono dato, si avrà ch'essi verranno rappresentati in superficie dal prodotto di tutte le basi, ossia dell'intiero perimetro del poligono dato, per la metà dell'altezza comune, ch'è un raggio dritto, come *cq*. Con ciò rimane il nostro teorema dimostrato.

Corollarî. Poichè, come precedentemente si è detto, il cerchio si puol considerare come un poligono regolare d'infiniti lati, il di cui raggio dritto è il raggio stesso del cerchio, perciò *la superficie di un cerchio si otterrà col prodotto della sua periferia per la metà del raggio.*

Quindi la superficie di un settore circolare, come *acd* (Fig. 66), potendosi considerare come l'aggregato delle superficie di tanti triangoletti, di uguali altezze, rappresentate nel raggio, e che hanno per base gli archetti, in cui s'intende diviso l'arco circolare *ad*, perciò la superficie di un settore circolare si ottiene col prodotto del suo arco per la metà del raggio.



LEZIONE XLIII.ª

TEOREMA

Ogni cerchio, come *adm*, si può considerare, in superficie, uguale ad un triangolo rettangolo *cmn*, la di cui base *mn* pareggia la circonferenza del detto cerchio, e l'altezza *cm* il raggio di esso.

Dimostrazione. Poichè si è precedentemente dimostrato, che la superficie circolare è uguale al prodotto della sua periferia per la metà del raggio, ed essendo la superficie del triangolo $cmn = mn . \frac{cm}{2}$, ossia uguale alla periferia che vien rappresentata dalla *mn* moltiplicata per la metà del raggio *cm*; dunque è vero il teorema sopracitato.

PROBLEMA

Misurare la corona circolare *mdapu*, compresa fra i due cerchi concentrici *adm*, *pu*.

Operazione. Si tiri il raggio *cum*, ed al punto *m* si meni la tangente *mn*, che sia uguale allo sviluppo della periferia *mda*; quindi si congiunga il centro *c* col punto *n*, mediante la *cn*: dal punto *u* si meni la *uq*, paralella ad *mn*, fino all'incontro della congiungente *cn*; dico, che la superficie della corona circolare sopra indicata, è uguale all'aja del trapezio *uqmn*.

Dimostrazione. Poichè *uq* è paralella ad *mn*, i due triangoli *cuq*, *cmn*, sono simili, ed in conseguenza

$$cu : cm = uq : mn.$$

Or, pel dimostrato precedentemente, si ha, che le circonfe-

renze dei dati cerchi sono tra loro come i raggi *cu*, *cm*; dunque sarà

Perif. *pu* : perif. $mda = uq : mn$, e permutando

Perif. $pu : uq =$ perif. $mda : mn$; ma si ha per costruzione

Perif. $mad = mn$, dunque sarà pure perif. $pu = uq$.

Ciò posto, pel teorema precedente si ha che la superficie del cerchio *mda* è uguale $mn . \frac{cm}{2}$, ed essendosi trovato poco fa, che la periferia del cerchio $pu = uq$, sarà

Superf. $pu = uq . \frac{cu}{2}$; or la corona circolare *mdapu* è uguale alla superficie del cerchio grande, meno quella del cerchio minore, ossia

$$\text{coron. } mdapu = mn . \frac{cm}{2} - uq . \frac{cu}{2}.$$

Ma la espressione $mn . \frac{cm}{2}$ rappresenta la superficie del triangolo *cnm*, e l'altra $uq . \frac{cu}{2}$, rappresenta quella del triangolo *cqu*, dunque la superficie della corona circolare risulta uguale alla differenza del triangolo *cmn* dall'altro *cuq*, ossia uguale al trapezio *umnq*, come di sopra si è detto.

Corollario. Poichè si è dimostrato essere corona $mdapu =$ trapezio *umnq*, e quest'ultimo venendo rappresentato in superficie della espressione $\frac{uq + mn}{2} . um$, ed esssendo $uq =$ perif. *pu*, non che $mn =$ perif. *mda*, si può generalmente asserire, che la *superficie di una corona circolare, formata da due cerchi concentrici è uguale al prodotto della metà della somma delle due periferie, moltiplicata per la differenza dei due raggi.*

LEZIONE XLIV.ª

TEOREMA

I paralellogrammi i quali hanno uguali basi sono fra loro nella ragione delle rispettive altezze; e se hanno uguale altezza, essi sono nella ragione delle basi.

Dimostrazione. Si chiamino p, e q i due paralellogrammi, le di cui basi sieno rispettivamente b, e b′; e sieno c, c′ le rispettive altezze. Per lo dimostrato precedentemente sarà

$p = b.\ c$, e $q = b'.\ c'$, ed in conseguenza si potrà stabilire la seguente proporzione

$p : q = b.\ c : b'.\ c'$, e prendendo gli esponenti di queste due ragioni uguali, sarà

$$\frac{p}{q} = \frac{b.\ c}{b'.\ c'}.$$

Or suppongasi che i detti due paralellogrammi abbiano le basi uguali, vale a dire sia $b = b'$; in questo caso i due termini della precedente uguaglianza diventano $\frac{p}{q} = \frac{b.\ c}{b.\ c'}$; ma è $\frac{b}{b} = 1$; quindi $\frac{p}{q} = \frac{c}{c'}$; e passando dagli esponenti alle ragioni si ha $p : q = c : c'$. Ma c, e c′ sono le altezze dei dati paralellogrammi, le di cui basi si sono supposte uguali, dunque è vero, che i paralellogrammi di uguali basi, sono fra loro nella ragione delle altezze.

Passiamo ora ad esaminare il caso, in cui i paralellogrammi hanno uguali altezze; sarà per tale supposizione

$\frac{p}{q} = \frac{b.\ c}{b'.\ c}$; e pel ragionamento nel precedente caso tenuto, essendo $\frac{c}{c} = 1$, sarà $\frac{p}{q} = \frac{b}{b'}$, e spiegando la propor-

zione indicata da questi due esponenti uguali, sarà $p : q = b : b'$; ove si vede che i paralellogrammi, ai quali si è data uguale altezza, sono nella ragione delle basi rispettive.

Corollari. Riprendendo la proporzione stabilita nel precedente teorema, vale a dire

$$p : q = b.\, c : b'.\, c',$$

essa ci dimostra, che i *paralellogrammi di qualunque basi, ed altezze, sono fra loro come i prodotti delle rispettive basi per le rispettive altezze, ossia nella ragion composta di esse.*

Inoltre essendosi precedentemente dimostrato, che ogni triangolo è sempre la metà del paralellogrammo, che ha la stessa sua base, ed altezza, ed i tutti essendo fra loro nella ragione delle rispettive metà, così si può ritenere per dimostrato, che *i triangoli di uguali basi sono fra loro come le altezze; e quelli di uguali altezze, sono fra loro come le basi.*

In fine, riprendendo l'espressioni $p = b.\, c$, e $q = b'.\, c'$, che si sono nel precedente teorema stabilite, e supponendo che sia $p = q$, sarà pure $b.\, c = b'.\, c'$.
Quindi sarà
$b : b' = c' : c$, questa proporzione, nata dalla condizione di essere $p = q$, ossiano dell'essere uguali due paralellogrammi di qualunque basi, ed altezze, dà in conseguenza, che in tale ipotesi le rispettive basi sono fra loro nella inversa ragione delle altezze.

TEOREMA

I paralellogrammi simili sono fra loro in duplicata ragione dei lati omologhi.

Dimostrazione. Siano *abcd, fgb'i,* (Fig. 67) due paralellogrammi simili: si abbassino da' vertici degli angoli *a, f* le perpendicolari *ap, fp,* sulle basi *cd, b'i;* queste, de' dati paralellogrammi, sono le altezze rispettive. Or i due triangoli *acp, fb'p,* avendo gli angoli in *p* fra loro uguali, perchè retti,

non che uguali c, b, perchè angoli che appartengono a' due paralellogrammi simili, sarà il rimanente angolo $cap = b'fp$, per lo che detti triangoli sono simili; ed in conseguenza $ac : fb' = ap : fp$. Ma per la simiglianza de' dati paralellogrammi si ha

$ac : fb' = cd : b'i$; dunque sarà

$ap : fp = cd : b'i$; vale a dire ne' due paralellogrammi dati le basi sono come le altezze rispettive. Or, chiamando i detti due paralellogrammi p, e q, essi, pel corollario precedente, sono nella ragion composta delle basi, ed altezze rispettive, vale a dire

p : q $= (ap : fp)\ (cd : b'i)$, e poichè si è poco prima trovato, che $ap : fp = cd : b'i$, dunque le due ragioni componenti sono uguali, e quindi quella di p : q è come la duplicata di $ap : fp$, o di $cd : b'i$; ma cd, $b'i$ sono lati omologhi dei dati paralellogrammi, dunque è vero l'enunciato teorema.

Corollario. Si ricava, che i triangoli, essendo sempre metà dei paralellogrammi, che hanno le stesse basi, ed altezze, così anche *i triangoli simili sono fra loro nella duplicata ragione de' lati omologhi.*



LEZIONE XLV.ª

PROBLEMA

Formare un quadrato, che sia uguale in superficie ad un paralellogrammo dato.

Operazione. Chiamisi h, l'altezza, e b la base del dato paralellogrammo, che dinoteremo con P; sarà $P = b.\,h$. Si trovi fra le due linee rette h, e b, la media proporzionale, che chiameranno a: dico essere a il lato del quadrato, la di cui superficie è uguale a quella del paralellogrammo P.

Dimostrazione. Poichè a è media proporzionale fra h, e b, sarà

$h : a = a : b$, e quindi $h.\,b = a^2$ Ma si è detto, essere $h.\,b = P$, dunque sarà pure $a^2 = P$, ch'è quanto bisognava dimostrare.

TEOREMA

In ogni triangolo rettangolo *acb* (Fig. 68), il quadrato *bnqc*, fatto sulla ipotenusa, è uguale alla somma de'quadrati o, ed m, fatti su i cateti.

Dimostrazione. Abbassata dal vertice a la perpendicolare *apx*, si ha,

$bc : ab = ba : bp$, e quindi $\overline{ab}^2 = bc\,.\,bp$; ma $bc\,.\,bp =$ superficie del paralellogrammo *bnpx*, ed $\overline{ab}^2 = o$, dunque $bnpx = o$. Con uguale raziocinio si ha $bc : ac = ac : pc$, e quindi $\overline{ac}^2 = bc.\,pc$, ossia $m = pxqc$, ed in conseguenza $bnpx + pxqc$, ossia tutto il quadrato *bnqc* sarà uguale $o + m$, come si è di sopra detto.

Corollario. Dunque il quadrato fatto sulla diagole *bc* (Figura 61) di un quadrato *abcd*, è doppio del quadrato fatto sopra uno de'lati del quadrato medesimo. Or (Fig. 41) essendo $\overline{ab}^2 = 2\,\overline{ac}^2$, si concluderà, che $ab = ac\,\sqrt{2}$, e posto il raggio $ac = 1$, otterrassi $ab = \sqrt{2}$. E perchè il metodo per con-

seguire *ab* è rigoroso, ne siegue che la Geometria dà esattamente la grandezza corrispondente alla incommensurabile $\sqrt{2}$, la quale col soccorso de'numeri non può ottenersi, che con approssimazione.

TEOREMA

Le superficie de'poligoni simili sono tra loro come i quadrati de'lati omologhi, o delle linee omologhe.

Dimostrazione. Siano *abcdf, ghilm*, (Fig. 55) due poligoni simili; questi, pel detto nella Lez: XL, possono essere divisi, per lo mezzo delle *ac, ad, gi, gl* in triangoli simili. Come pure se i poligoni simili dati sono regolari (Fig. 56) possono essere benanche divisi in un ugual numero di triangoli simili, per lo mezzo dei raggi obliqui. Or, come si è precedentemente dimostrato, le superficie de'triangoli simili sono fra loro come i quadrati de'lati omologhi, ed essendo la superficie del poligono p, e quella del poligono x, uguali rispettivamente alla somma de'triangoli, che compongono p ed x, così potrassi stabilire la seguente proporzione

$p : x = abc + acd + adf : ghi + gli + glm$. Intanto, per le simiglianze di detti triangoli si ha,

$$abc : ghi = \overline{ab}^2 : \overline{gh}^2$$
$$acd : gil = \overline{dc}^2 : \overline{il}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{gh}^2 ;$$
$$adf : glm = \overline{df}^2 : \overline{ml}^2 : \overline{ab}^2 : \overline{gh}^2 ,$$

dunque le ragioni $abc : ghi$, $acd : gil$, $adf : glm$, sono tutte fra loro uguali, ed in conseguenza, sarà

$$abc + acd + adf : ghi + gli + gml = abc : ghi; \text{ ma è}$$
$$abc : ghi = \overline{ab}^2 : \overline{gh}^2 = \overline{ac}^2 : \overline{gi}^2 ,$$

dunque sarà

$abc + acd + adf : ghi + gil + glm = \overline{ab}^2 : \overline{gh}^2 = \overline{ac}^2\ \overline{gi}^2$; ovvero $p : x = \overline{ab}^2 : \overline{gh}^2 = \overline{ac}^2 : \overline{gi}^2$, come si è in principio annunziato.

Corollario. Dunque i poligoni regolari simili, sono fra loro come i quadrati dei lati omologhi, oppure come i quadrati

dei loro perimetri, i quali, come si è innanzi detto, sono tra loro nella ragione de' lati omologhi; oppure come i raggi dritti, od obliqui, ai quali i poligoni simili, e regolari, sono pur proporzionali. Potendosi i cerchi considerare come poligoni simili, così le superficie de' cerchi sono pure come i quadrati dei lati omologhi, ovvero de' raggi, o de' diametri.

Corollari. Si è detto nel precedente problema, che il quadrato fatto sulla linea retta, ch'è media proporzionale fra la base, e l'altezza di un paralellogrammo è al medesimo uguale; e poichè ogni triangolo è uguale ad un paralellogrammo, che ha la stessa sua base, e la metà dell'altezza, ne risulta, che il quadrato, che ha per lato la media proporzionale, in ordine alla base del triangolo, ed alla metà dell'altezza, sarà uguale in superficie ad esso triangolo.

Inoltre, perchè ogni poligono regolare è uguale in superficie al prodotto del suo perimetro per la metà dell'altezza, o raggio diritto, si potrà ottenere con ciò un triangolo che sia in superficie uguale al poligono regolare; quindi, quadrando col precedente metodo, un tal triangolo, si avrà la quadratura del dato poligono. In fine la superficie di un cerchio, potendosi considerare uguale a quella di un triangolo, che ha la base uguale alla periferia, e l'altezza uguale alla metà del raggio, si avrà la quadratura del cerchio formando un quadrato, che abbia per base la media proporzionale fra la linea retta, che è uguale alla periferia, e la metà del raggio. E poichè la linea retta, che sia uguale alla periferia del cerchio non si può ottenere, che per approssimazione, a causa che dessa dipende dal rapporto della periferia al raggio, che si è fissato essere, approssimativamente, come 22 : 7: perciò la quadratura del cerchio non si ha, che approssimativamente.

Avvertimento. Si calcola la superficie di un poligono qualunque, riducendo esso poligono in triangoli, e quindi, calcolate le rispettive superficie di questi, con i metodi precedentemente dati, la somma di esse darà la superficie dal dato poligono.

LEZIONE XLVI.

DE' PIANI.

Definizioni. Dicesi un piano, o superficie piana, essere perpendicolare ad un'altro, quando lo incontra senza inclinarsi menomamente, nè da un lato, nè da un'altro.

Se una linea retta, come *acb* (Fig. 69) incontra il piano *dmg* (1), tale incontro viene dinotato da un punto *c*. Una linea retta, che ha due suoi punti in un piano, giace intieramente nel piano istesso, altrimenti la linea non sarebbe retta; ciò è coerente all'idea fattaci della superficie piana.

La posizione di un piano, come *dcm*, resta determinata da tre punti *d*, *c*, *m*, non posti in linea retta. Imperciocchè potendosi sempre concepire che un piano giri intorno ad una linea retta, tirata fra due suoi punti, prendendo infinite posizioni differenti, se desso si obbliga passare per un terzo punto dato, rimarrà così fissato, e quindi determinato di posizione.

Se un piano *acg* incontra l'altro *gnd*, la sezione *cg* è una linea retta; doppoichè dessa appartenendo, nello stesso tempo, all'uno ed all'altro piano, su i quali giace interamente, non potrà essere che una linea retta.

Sono *piani paralelli* quelli, che, prolungati da ambe le parti, non s'incontrano mai. Quindi se i due piani paralelli *ab*, *fg*, (Fig. 70) vengono tagliati da un terzo piano *abfg*, le due sezioni *ab*, *fg* saranno linee fra loro paralelle, dappoichè, trovandosi esse ambe nel piano secante, e rispettivamente nei due piani paralelli, non s'incontreranno mai.

Corollari. Una linea retta *ac* (Fig. 69) perchè sia perpendicolare al piano *dgm*, fa d'uopo, che la medesima sia perpen-

(1) In tutto ciò che siegue, le figure dinoteranno sempre lo spazio nelle sue tre dimensioni.

Le linee punteggiate dinotano quella porzione di esse, che passa al di dietro de' piani stessi.

dicolare a tutte le altre rette *cg*, *cd*..., che si tirano dal punto d'incontro *c*, nel piano medesimo; dapoichè, se così non fosse, ed a qualcheduna di dette linee essa fosse obliqua, dovrebbe la *ac* essere inclinata più da un lato, che da un'altro del detto piano, e quindi non sarebbe al medesimo perpendicolare.

Da un punto *a*, preso fuori di un piano, o dall'altro *c*, preso sul piano medesimo, non si possono menare allo stesso due perpendicolari; dappoichè, nel primo caso, se si voglia supporre che le *ac*, *ag*, fossero ambe perpendicolari al piano, tali sarebbero alla *gc*, che ne unisce i due punti d'incontro, e quindi nel triangolo *agc* vi sarebbero due angoli retti, il che è un'assurdo. E nel secondo caso se *ac*, *pc* fossero ambe al piano perpendicolari, tali sarebbero alla *cn* tirata in esso piano, e che rappresenta la comune sezione de'due piani *ggmd*, e di quello che passa per le due rette *ac*, *ap*; quindi gli angoli *acn*, *pcn*, ambi retti, e uguali, il che è assurdo.

La comune sezione *ab* (Fig. 71) dei due piani *gm*, *pn*, perpendicolari al piano *cd*, è pur perpendicolare ad esso piano. Imperciocchè giacendo la *ab* in ambi i piani perpendicolari *gm*, *pn*, essa non dovrà menomamente inclinare nè da un canto, nè da un'altro del piano *cd*, e quindi sarà a questo perpendicolare.

L'inclinazione di due piani fra loro secanti, come *bn*, *bq* (Fig. 72) viene indicata dall'angolo, che formano le due linee *px*, *dx* tirate da un punto *x* preso sulla comune sezione *ab*, perpendicolari alla medesima e giacenti una in un piano, e l'altra nell'altro. Dappoichè supponiamo che i due dati piani *bn*, *bq* sieno applicati l'uno sull'altro, e che quindi si distaccano, girando a cerniera sulla comune sezione *ab*; in questo caso il punto *d*, nel distaccarsi dal punto *p*, descriverà un arco di cerchio *pd*, che è appunto la misura dell'angolo d'inclinazione *pxd*.

Definizioni. L'angolo *pxd* dicesi *angolo piano*, o, secondo i moderni, *angolo diedro;* val quanto dire angolo a due facce: espressione più adattata della prima, che adottò sola-

mente l'uso. *Angolo triedro* è un'angolo a tre facce, *tetraedro* angolo a quattro facce, ed in generale *angolo poliedro* quello a più facce.

Or, tenendo un ragionamento, uguale a quello fatto di sopra, si ha, che l'*inclinazione di una linea, come* pc, (Fig. 69) *che cade sul piano* mcd, *viene indicata dall'angolo* pcd *fatto da essa* pc, *e dalla* cd, *tirata dal punto* c, *ove la prima incontra il piano, al punto* d, *ove la perpendicolare, abbassata dal punto* p, *incontra il piano stesso*. Dappoichè, se la *pc* fosse abbattuta sulla *cd*, e quindi s'immagina dalla stessa sollevata, girando sul punto *c*, in questo caso il punto *x*, che coincideva con *d*, descrive l'arco *dx*, ch'è la misura dell'angolo *pcd*, e che dinota l'inclinazione delle due *pc*, *cd*.

Si noti in fine, che *la distanza di un punto qualunque* p *da un piano, vien misurata dalla perpendicolare* pd, *che dal detto punto si abbassa sul piano stesso;* dappoichè, essendo *pc* obliqua, e *pd* perpendicolare alla *cd*, sarà $pd < pc$, e quindi *dp*, è la più corta distanza del dato punto dal piano.

Dietro i principî, precedentemente stabiliti intorno alla natura dei piani, ed alla misura degli angoli d'inclinazione, ne risultano i seguenti.

Corollari. Se più piani si tagliano fra loro, ed hanno, per comune sezione una linea retta, gli angoli d'inclinazione, ch'essi formano, intorno a detta linea, insieme presi, sono uguali a 360°.

Se più piani paralelli vengono tagliati da un terzo piano, gli angoli corrispondenti sono fra loro uguali, come lo sono pure gli alterni, interni, ed esterni; non che gli angoli interni, dalla stessa parte del piano secante, sono uguali a due retti.

Viceversa, sono due piani fra loro paralelli, quando si avverano tutte l'uguaglianze fra gli angoli, indicati precedentemente.

Se un piano cade su di un'altro, gli angoli d'inclinazione, che esso fa, da una parte, e dall'altra di detto piano, sono insieme presi, uguali a due retti.

LEZIONE XLVII.

TEOREMA

Se due linee rette *dc*, *gc* s'incontrano in un punto *c*, esse giacciano in un istesso piano.

Dimostrazione. Intendasi passare il piano *dgc*, per la linea *gc*, e per un punto dell'altra linea *d*, è chiaro, che, passando detto piano pel punto *c*, appartenente alla *gc*, passa pure per un punto, che appartiene alla *cd*, giacchè il punto d'incontro *c* appartiene all'una ed all'altra linea; dunque il detto piano passa pei due punti *c*, e *d*, appartenenti alla *cd*, ed in conseguenza, pel detto nella precedente lezione, la *cd* si troverà tutta nel piano *gcd:* ma il piano stesso passa, per supposizione, pure per la *gc*, dunque tali due linee rette si trovano nel piano medesimo *gcd*, come si è di sopra annunziato.

TEOREMA

Se due linee rette *ae*, *pd* sono perpendicolari allo stesso piano *gcd*, esse sono fra loro paralelle.

Dimostrazione. Congiungansi, colla *cd*, i due punti d'incontro *c*, e *d* di esse perpendicolari col piano; pel detto nella precedente lezione sarà tanto la *ca*, che la *pd*, perpendicolare alla *cd;* ed in conseguenza gli angoli *acd*, *pdc* insieme presi sono uguali a due angoli retti, per lo chè esse linee sono fra loro paralelle.

TEOREMA

Se una linea retta è perpendicolare ad uno di due piani paralelli, la sarà benanche all'altro.

Dimostrazione. Suppongasi per poco, che la linea retta per-

pendicolare ad uno de' due piani paralelli, non fosse tale all'altro, avverrebbe in tal caso che il secondo di tali piani sarebbe inclinato verso un canto della linea retta perpendicolare al primo; ma questa supposizione porta in conseguenza, dover essere un tal piano anche obliquo a quello, cui la linea è perpendicolare; e ciò essendo contrario alla nostra ipotesi, è forza convenire sulla verità del presente teorema.

Definizione. Dicesi *angolo solido*, o *angolo poliedro*, l'angolo *c* (Fig. 73) fatto dal concorso di più angoli piani *acb, acd, dcb*. Egli è chiaro che due angoli piani *acb, acd,* non sono sufficienti a racchiudere uno spazio, o comporre un'angolo solido; pel quale fa bisogno, che vi concorrono almeno tre angoli piani.

LEMMA

La somma di due qualunque degli angoli piani, componenti un angolo triedro, è sempre maggiore del terzo.

Dimostrazione. Se gli angoli *adc, adb, cdb* fossero uguali tra loro, la proposizione sarebbe di per sè stessa evidente; nel caso contrario sia p. e. *adb*, maggiore di ciascuno de' rimanenti angoli.

Si conduca la *ds* in modo che sia $ads = adc$: si tagli $ds = dc$, e si tirino le *asb, ac, cb*. I due triangoli *ads, adc* sono uguali perchè hanno l'angolo $ads = adc$, non che il lato $ds = dc$, e la *da* comune, ed in conseguenza è $ac = as$. Or nel triangolo *acb* si ha $ac + cb > as + sb$, e togliendo da ambe le parti le linee rette uguali *ac, as*, sarà $cb > sb$. Quindi nei due triangoli *cdb, sdb*, si ha il lato $dc = ds$, la *db* comune, la base $bc. > bs$; sarà in conseguenza $cdb > sdb$; dal che è manifesto, che $adc + cdb > ads + sdb$, ovvero $> adc$.

TEOREMA

La somma di tutti gli angoli diedri, che compongono un angolo solido, è sempre minore di quattro retti.

Dimostrazione. Sia l'angolo solido *a* (Fig. 74), fatto dalla concorrenza degli angoli piani *daf*, *fag*, *gah*, ec. e si chiuda detto angolo solido col mezzo di un piano qualunque *dfghb*. È chiaro, che i lati del poligono *dfghb*, formato dalle intersezioni di questo piano con ciascuna delle facce dell'angolo solido, cangeranno queste in altrettanti triangoli. Or, considerando separatamente l'angolo solido *fdba*, si ha che $fda + adb > fdb$, come pure l'altro angolo solido *bdha* dà $abd + abh > dbh$; e così dei rimanenti, dal che si deduce, che la somma degli angoli *adf*, *afd*, *adb*, *abd*, ec. sorpasserà quella degli angoli interni del poligono *dfghb*. Vale a dire, detta somma sarà maggiore di tanti angoli retti, quanto è il doppio numero dei lati di esso poligono, ovvero delle facce dell'angolo solido, meno quattro: e nel nostro caso, essendo cinque le facce dell'angolo solido, sarà la somma dei mentovati angoli maggiore di $10-4$, ovvero di 6 retti.

Or tutti gli angoli dei triangoli *adf*, *adb*, *abh*, ec. sono uguali a tanti due retti, quanti sono detti triangoli; ossia sono uguali a 10 retti; quindi se da tutti questi angoli, che valgono 10 retti, si tolgono quelli che corrispondono alle basi, vale a dire $adf + afd + adb +$ ec., quali si sono trovati essere maggiori di sei retti, rimarranno gli angoli intorno al punto *a*, ovvero l'angolo solido *a* minore di quattro retti, come si è di sopra detto.



LEZIONE XLVIII.

DEI SOLIDI (1).

Definizioni. Se s'immagina, che un piano qualunque *dcofg* (Fig. 75) si muove paralellamente a se stesso, lungo la *dh*, lasciando di sè sempre delle tracce, il solido che ne risulterà *dcofith*, avrà le facce opposte *dcofg*, *rhti*, tra loro uguali, e paralelle; e le rimanenti facce, come *dcrh*, tutte paralellogrammi. Questo solido viene denominato *prisma*; *dcofg*, *base* del prisma.

Il prisma è *triangolare*, *quadrangolare*, ec.; secondochè il piano generatore è un triangolo, un quadrilatero, ec.

La moderna scuola però chiama, in generale, *poliedro* ogni corpo terminato da più piani, e noi spesso useremo, da ora in poi, la medesima espressione, acciò i giovani si avvezzino alla nomenclatura, che è più usata ne'libri elementari moderni.

Posta la generazione de'corpi, come si è detto di sopra, se il piano generatore è un cerchio, il corpo, che ne risulta, dicesi *cilindro* (Fig. 76).

Se il piano generatore è un paralellogrammo, il corpo prende il nome di *paralellepipedo*; e questo sarà *rettangolo*, se il piano generatore è un rettangolo.

Il prisma, il cilindro, e'l paralellepipedo, si diranno *retti*, od *obliqui*, secondo che il piano generatore è perpendicolare, od obliquo, al lato, su cui si muove.

(1) Rigorosamente parlando, è molto impropria la voce di *solido*, o di *solidità*, in geometria; questa parola, fisicamente indica un'aggregato di particelle materiali, e quindi non è da confondersi col significato che ha in geometria, e che vuol dire lo spazio contenuto dalle superficie di un corpo. Il Signor Lacroix, per la detta ragione, nei suoi elementi di geometria ha bandita la voce di solido, e solidità, ed usa quella di *volume*, ch'è più corrispondente all'idea geometrica de'solidi; e noi useremo la medesima nel corso di queste rimanenti lezioni, quando saremo a calcolare la capacità de'corpi.

Quando il piano generatore è un quadrato (Fig. 77), e che muovendosi perpendicolarmente sul lato *ad*, ne trascorre la parte *ad*, uguale ad uno de' suoi lati, il poliedro prende il nome di *cubo*.

Quella linea retta, che dal centro della faccia superiore di un poliedro, si mena al centro della base, tanto nel prisma, che nel cilindro, dicesi *asse*.

Quel poliedro, che ha per base un poligono qualunque, e per facce laterali tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono di base, ed in conseguenza che termina in un angolo poliedro *a* (Fig. 74), dicesi *piramide; a* dicesi *vertice* della piramide.

La generazione della piramide ha luogo col movimento della linea retta *ad* intorno al poligono *fdhg*, rimanendo essa linea fissa con un suo estremo in *a*.

La piramide dicesi *triangolare*, *quadrangolare*, ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, ec.

Ma se nel cennato movimento della *ad*, intorno al punto fisso *a* avviene, che la figura, intorno la quale si aggira, è un cerchio, il corpo che ne risulta, dicesi *cono*.

La linea retta, che dal vertice della piramide, o del cono, si mena al centro della base della piramide, o del cono, dicesi *asse*. Se l'asse è perpendicolare alla base, la piramide, od il cono si dirà retto, e si dirà obliqua se l'asse è alla base obliquo.

Se un mezzo cerchio *amb* (Fig. 80) si muove intorno al diametro *ab*, tenendo fissi i suoi estremi in *a*, *b*, questo movimento genererà un corpo di figura rotonda, che si chiama *globo*, o *sfera:* questo corpo ha evidentemente tutti i punti della sua superficie ugualmente lontani dal centro *c*.

Tutte le linee tirate dal centro della sfera, e che toccano con i loro estremi la superficie della sfera medesima, diconsi *diametri* della sfera. Quel diametro, intorno al quale si è eseguito il movimento di generazione della sfera, dicesi *asse*. Ogni mezzo diametro, o mezzo asse, dicesi *raggio*.

Di tutt'i cerchi, che si possono ottenere sulla superficie sfe-

rica, mediante i piani secanti la medesima, si dicono *massimi* quelli, che hanno il loro centro nel centro stesso della sfera: tutti gli altri si dicono *cerchi minori*.

Ma se non l'intiero mezzo cerchio *amb*, ma il solo arco *an*, eseguirà il movimento sopra descritto, il corpo, che ne risulta *nal* dicesi *calotta sferica;* e se il movimento stesso verrà eseguito da un settore circolare *acn*, ne risulterà il *settore sferico* come *nalc*.

La porzione di superficie sferica, compresa fra due piani paralelli *mp*, *nl*, dicesi *zona*.

Fra i varj corpi, che possonsi concepire, si distinguono i *regolari:* tali sono quelli, che vengono terminati da facce, tutte poligoni regolari uguali, e si noverano di cinque specie, cioè il (1).

(1) Che cinque solamente siano i solidi regolari, viene a sufficienza chiarito dal principio, precedentemente dimostrato, cioè che tutti gli angoli piani, che compongono un angolo solido, sono sempre minori di quattro retti, o di 360°.

In fatti esaminiamo partitamente i poligoni regolari, che sono quelli coi quali si compongono i corpi regolari; e primieramente il triangolo equilatere, perchè ha ciascun' angolo di 60°, si potrà con tre di essi triangoli uguali avere l'angolo solido di 180°, ch' è quello del tetraedro: con quattro di detti angoli si potrà avere l'angolo solido di 240° ch' è quello dell'ottaedro: con cinque de' medesimi angoli si avrà l'angolo solido di 300°, ch' è quello dell'icosaedro; ma se si vorranno adoprare sei angoli di triangolo equilatere, essi danno 360°, e non possono comporre un angolo solido. Vediamo ora quanti angoli solidi si possono ottenere dalla unione degli angoli piani di quadrati uguali. Valendo ogni angolo di un quadrato 90°, così tre di essi danno l'angolo solido 270°, ch' è quello del cubo; ma con quattro di detti angoli, ottenendosi 360°, non si potrà con essi formare alcun angolo solido.

Il pentagono regolare, avendo ciascun angolo di 108°, così tre di tali angoli dando 324°, è questo l'angolo solido del dodecaedro; ma quattro di essi angoli dando un numero maggiore di 360°, perciò col pentagono non si può ottenere, che il solo dodecaedro. Ma adoperando l'esagono, e gli altri rimanenti poligoni regolari si vede, che tre angoli di ciascuno non dando giammai la somma minore di 360°, con niuno di detti poligoni si potrà ottenere un angolo solido, e quindi niun corpo, o solido regolare.

E riunendo la precedente analisi concluderemo, che i solidi regolari si possono solamente ottenere dal triangolo equilatere, dal quadrato, dal pentagono; e propriamente tre dal primo, ed uno per ciascuno dei rimanenti degli enunciati poligoni regolari.

Tetraedro, ovvero la piramide, terminata da quattro triangoli equilateri uguali, (Fig. 81).

Cubo, o *esaedro*, terminato da sei quadrati uguali, (Fig. 77).

Ottaedro, terminato da otto triangoli equilateri uguali, (Fig. 82).

Dodecaedro, terminato da 12 pentagoni uguali, e regolari, (Fig. 83).

Icosaedro, terminato da 20 triangoli equilateri uguali, (Fig. 84) (1).

(1) In ogni poliedro, distinguendosi le facce, i lati, e'l numero degl'angoli, è curioso l'osservare che tutte le dette cose sodisfano ad una condizione, che notò Eulero, e che si lesse nel giornale della scuola Politecnica di Parigi, n. 16: dessa è la seguente: chiamando S il numero degli angoli del poliedro; H quello delle facce, ed A quello de' lati, si ha sempre $S+H=A+2$. In fatti nel cubo essendo $S=8$, $H=6$, $A=12$, ogn'un vede, che

$$8+6=12+2.$$

LEZIONE XLIX.

Posto il detto nella precedente lezione, procediamo all'esame degl'indicati corpi, calcolandone la misura tanto in rapporto alle superficie, che a'volumi.

E qui premettiamo il modo di sviluppare la superficie laterale de'corpi, in equivalenti superficie piane.

PROBLEMA

Sviluppare in equivalente superficie piana, quella di un prisma retto.

Operazione. Sia *dofih* il dato prisma retto (Fig. 75): formisi il paralellogrammo rettangolo *acdb*, che abbia la base *ab* uguale allo sviluppo del perimetro della base del dato prisma, e l'altezza $ac = dh$, lato dello stesso prisma. La superficie di un tal paralellogrammo sarà uguale alla laterale del dato prisma.

Dimostrazione. Poichè la superficie laterale del prisma è composta di tanti paralellogrammi della stessa sua altezza, quanti sono i lati del poligono generatore, ciascuno de'quali è base del corrispondente paralellogrammo, per ciò dessa valerà quanto la superficie del paralellogrammo rettangolo, fatto colla base *ab*, e coll'altezza *ac*, come sopra si è detto.

Corollario. Poichè un cilindro retto si può considerare come un prisma retto, composto d'infiniti piccoli paralellogrammi rettangoli: così la superficie laterale di un cilindro retto si sviluppa in un paralellogrammo rettangolo, che ha la stessa altezza del cilindro, e per base lo sviluppo della periferia del cerchio generatore.

TEOREMA

Lo sviluppo della superficie laterale di una piramide ret-

ta, è uguale a quella di tutt'i triangoli, che detta piramide compongono.

Dimostrazione. Poichè la superficie laterale della piramide è composta di tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono della base, perciò è vero l'enunciato teorema. Vedi figura 88.

Corollario. Quanto si è detto per la piramide retta, vale pure pel cono retto; il quale, come si è detto antecedentemente, può considerarsi come una piramide, composta d'infiniti triangoletti uguali.

Avvertimenti. Premesso quanto si è accennato intorno al modo di sviluppare la superficie laterale de'corpi; passiamo al modo di calcolarla. Ma, prima di ogn'altra cosa, è da notarsi il seguente principio generale, da sè stesso chiaro, cioè. *La superficie di un corpo qualunque è uguale alla somma delle superficie di tutte le facce che lo compongono.* In conseguenza di un tal *principio*, e perchè ogni solido regolare è composto di un numero di facce uguali; è da ritenersi, che *la superficie di un solido regolare pareggia quella di una delle sue facce, moltiplicata pel numero delle facce di esso solido.*

Corollario. Dunque la superficie laterale di un prisma retto, o di un cilindro retto, si ottiene moltiplicando uno dei lati, o l'altezza di esso, pel perimetro della base; e la superficie totale del prisma, o del cono rettq, si ha sommando la laterale di ciascuno con quella delle proprie basi.

Dunque la superficie laterale di una piramide, o di un cono retto, è uguale al prodotto del perimetro delle base, per la metà dell'altezza; e la superficie totale si otterrà aggiungendo alla laterale quella della propria base, che sarà sempre quella di un poligono, o di un cerchio.



LEZIONE L.ª

Calcoleremo nella presente lezione le superficie laterali, e totali de'corpi, quando sono obliqui; e delle piramidi, e coni, quando sono tronchi.

TEOREMA

La superficie laterale di un prisma obliquo si ottiene col prodotto di un lato del prisma, pel perimetro della sezione, fatta perpendicolarmente all'asse del prisma stesso.

Dimostrazione. Poichè precedentemente si è detto, che la superficie laterale di un prisma si compone di tanti parallelogrammi, quanti sono i lati del perimetro della base; così la somma delle superficie di detti parallelogrammi, darà la superficie laterale del prisma.

Ciò posto, la superficie di ciascun parallelogrammo, *lifg* (Fig. 86) si ottiene dal prodotto di uno de'suoi lati *fi*, per l'altezza, che vien rappresentata dalla *px*, ch'è una retta abbassata perpendicolarmente fra due suoi lati; similmente la superficie dell'altro parallelogrammo *ifrn*, vien dinotata dal prodotto dell'altro lato *nr* per l'altezza *ps*, e così de'rimanenti: in modo che si avrà la superficie laterale del dato prisma coi prodotti di ciascun lato per le rispettive perpendicolari *xp*, *ps*, *sp*, ec. ossia

superf. later. $= if.\,px + nr.\,ps +$ ec.; ma i lati *if*, *nr*, ec. sono fra loro uguali, dunque sarà

superf. later. $= if.\,px + if.\,ps +$ ec.; ma le *px*, *ps*, ec. formano il perimetro di una sezione fatta perpendicolare a'lati del prisma, o all'asse, ch'è ad essi paralello, dunque è vero il teorema, come si è in principio annunziato.

Se alla superficie laterale si aggiungono quelle delle due basi, si avrà la superficie totale del prisma.

TEOREMA

La superficie laterale di una piramide obliqua si ottiene colla somma delle superficie di ciascun triangolo, che la compone.

Dimostrazione. Ciò è chiaro da sè stesso; se alle superficie de' triangoli laterali si aggiunge quella della base, si avrà la superficie totale.

La superficie laterale, e totale del cono obliquo; si otterrà considerandolo come piramide, composta di molti piccoli triangoli.

TEOREMA

La superficie laterale di una piramide retta tronca, come *mdfgm*, (Fig. 74) avente le due basi paralelle, si ottiene col prodotto della *np*, rimanente porzione dell'altezza *ap*, nella semisomma de' perimetri delle due basi.

Dimostrazione. Essendo trapezii le facce laterali della piramide tronca a basi paralelle, perciò, calcolando con i metodi dati precedentemente, la superficie di ciascuna faccia, si otterrà la laterale della data piramide tronca col prodotto della semisomma de' due perimetri delle basi nell'altezza *np* comune alle facce.

Se alla laterale si aggiunge quella delle due basi, si avrà la superficie totale.

Avvertimento. Se la piramide tronca sarà obliqua, si otterrà la superficie di lei colla riunione di quelle di tutte le facce, calcolate partitamente.

Pel cono tronco retto, ed obliquo, vale quanto si è detto per le piramidi tronche rette, od oblique.

Riprendiam ora a considerare la sfera, di cui si è data la definizione nella XLVIII.ª lezione, e notiam il seguente

TEOREMA

La sezione della sfera, fatta con un piano qualunque, è sempre un circolo.

Dimostrazione. Il presente teorema ammette due casi: 1.° quando il piano secante passa pel centro della sfera: 2.° quando non vi passa.

Nel primo caso la proposizione è da sè manifesta, giacchè la circonferenza di una tale sezione ha per raggio il raggio della sfera.

Nel secondo caso; sia *dgfh*, (Fig. 80 bis) un piano qualunque secante la sfera: dal centro *o* si abbassi, su di esso, la perpendicolare *oe;* il piede *e* di questa perpendicolare sarà ad ugual distanza da tutt'i punti della sezione *dgfh;* da poichè tutte le oblique *od, og, of...* essendo fra loro uguali, perchè raggi della sfera, la *oe* comune, gli angoli in *e* retti, perciò i triangoli *oed, oeg, oef...* sono uguali, e quindi le *ed, eg, ef...* fra loro benanche uguali, dal che risulta, che i punti *d, g, f...* si allontanano ugualmente dal punto *e*: dunque la curva *dgfh* è un cerchio, che ha il suo centro in *e*, e per raggio *ed.*

Osservazione. Il raggio *ed* perpendicolare ad *oe* essendo necessariamente minore della obliqua *od*, raggio del cerchio massimo, il detto cerchio *dgfh* risulta minore di quello, che si ottiene da una sezione fatta pel centro della sfera; il che rientra nella definizione data de' cerchi massimi, e minori. Quindi *tutt'i cerchi massimi, avendo per raggio lo stesso raggio della sfera, sono fra loro uguali.*

Si noti inoltre, che *due circoli massimi* acf, aih, *quando s'intersecano, si tagliano sempre in due parti uguali;* poichè essi non possono incontrarsi, che nella retta *ao*, prolungata, sezione de' loro piani, la quale, passando pel loro centro comune, è nel tempo stesso il diametro dell'uno e dell'altro circolo, e per conseguenza li divide in due parti uguali.

Definizione. Tre cerchi, che si tagliano, due a due, sulla superficie sferica, formano il *triangolo sferico*: ordinariamente non si considera che quello, come *cia*, ch'è formato da tre archi di cerchi massimi, ciascuno però minore della mezza periferia.

LEZIONE LI.ª

TEOREMA

La superficie di una sfera si ottiene col prodotto del suo diametro, moltiplicato per la circonferenza del cerchio massimo.

Dimostrazione. Sia (Fig. 80) *ambl* una sfera, generata dal semicerchio *amb*, che gira intorno all'asse, o diametro, *ab*. Prendasi l'arco piccolissimo *min* sul cerchio massimo, e si divida per metà in *i*: da'punti *m*, *i*, *n* si abbassino lè perpendicolari *md*, *ix*, *ng*, sul diametro *ab*; non che si meni *mo* perpendicolare alla *ng*.

Poichè i triangoli *mon*, *ngc*, hanno i lati rispettivamente perpendicolari, essi sono equiangoli, e quindi simili; dal che si ottiene

$$nc : ng = mn : mo;$$

Ma essendosi preso l'arco *mn* picciolissimo, si può considerare, senza sensibile errore, $ng = ix$, perciò sarà

$$nc : ix = mn : mo.$$

Or considerando le due linee *nc*, *ix*, come raggi di cerchio, si ha, pel dimostrato nella lezione XL.ª, che

Circonferenza raggio NC : *circonferenza raggio* IX $= nc : ix$; ovvero

Circonferenza raggio NC : *circonferenza raggio* IX $= mn : mo$; e per semplicità, chiamando P la circonferenza del raggio *nc*, e P′ quella del raggio *ix*, sarà $P : P' = mn \,.\, mo$, e quindi $P . mo = P' . mn$.

Ma, come osservasi nella seguente nota, $P' . mn$ è la superficie laterale del cono tronco, descritto dalla rivoluzione del trapezio *mngd*, durante la rivoluzione del semicerchio

amb intorno di *ab* (1); e P. *mo*, ovvero P. *dg*, è il prodotto della periferia del cerchio massimo per la porzione del diametro, intorno a cui gira l'arco *mn* nella generazione del cono tronco; dunque (potendosi altro tanto dire di tutte le altre superficie, corrispondenti a ciascun archetto, compo-

(1) Nella precedente lezione si è dimostrato, che la superficie laterale di una piramide tronca, (o cono) a basi paralelle, si ottiene col prodotto della semisomma de' perimetri delle due basi, nella corrispondente porzione dell'altezza. Or qui dicesi, che la detta superficie nasce dal prodotto della porzione dell'altezza nel perimetro della sezione, fatta da un piano, che passa per la metà de' lati della piramide tronca. Che questi due principj sono fra loro identici, è facile il dimostrarlo come siegue. Sia (Fig. 74) *mdfgm* una piramide retta tronca, e sia *oo* un piano che passa per la metà de' suoi lati *md*, *mg*, paralellamente alla base: è evidente, che la superficie di ciascuna delle costole della piramide retta tronca *mdfgm*, è di figura trapeziale. Or la superficie di un trapezio, oltre al modo dettato precedentemente, si ottiene col prodotto dell' altezza nella linea, che si mena paralellamente alla base nella metà di uno de' suoi lati.

In fatti (Fig. 57) si meni, nel trapezio *acdb*, *xg* paralella alle basi *ab*, *cd* dal punto *x*, che segna la metà di *ac*; sarà, pe' triangoli simili *abc*, *xnc*, $ac : cx = cb : cn$; ma *ac* è doppia di *cx* dunque anche *bc* è doppia di *cn*; similmente pe' triangoli simili *bcd*, *bng*, si ha $bc : bn = bd : bg$; ma *bc* è doppia di *bn* dunque anche *bd* è doppia di *bg*.

Inoltre pei medesimi triangoli simili *abc*, *xnc*, si ha $ab : xn = ac : cx$, ma *ac* è doppia di *cx*, dunque si potrà dire che $ab : xn = 2 : 1$.

Similmente si ha, che pe' triangoli simili *bcd*, *bng*, è $bd : bg = cd : ng$; ma è *bd* doppia di *bg*, dunque si può dire, che

$cd : ng = 2 : 1$; quindi, facendo il prodotto degli estremi, e quello dei medj termini, nelle due proporzioni, di sopra ricavate, sarà

$2 . xn = ab$, e $2 . ng = cd$;

ovvero $xn = \frac{ab}{2}$, e $ng = \frac{cd}{2}$, ed in conseguenza sarà

$$xn + ng = xg = \frac{ab + cd}{2}.$$

Ma pel detto nella lezione XLII.ª l'aja del trapezio $acdb = \frac{ab + cd}{2} . mp$;

dunque sarà pure aja del trapezio $acdb = gx . pm$.

Ciò posto, chi non vede (Fig. 74) che, essendo trapeziali le figure delle costole della piramide tronca *mdfgm*, si ottiene la superficie laterale di essa col prodotto della periferia della sezione del piano *oo*, menato paralellamente alla base, sulla metà delle costole, nell' altezza *np*?

nente il semicerchio generatore *amb*); sarà, riunendo tutte tali superficie, la totale superficie della sfera uguale al prodotto della periferia del cerchio massimo, per le corrispondenti porzioni dell'asse, ovvero per l'intiero asse *ab*; come si è in principio detto.

Corollari. Dunque *la superficie di una calotta sferica, come* map, *è uguale al prodotto della circonferenza di un cerchio massimo, per la corrispondente altezza* ad; come pure, *la superficie di una zona* mnlp, *è uguale al prodotto dalla periferia di un cerchio massimo per la corrispondente altezza* dg. Dunque *la superficie di un settore sferico, come* nalc *è uguale a quella detta calotta* nal, *più la superficie laterale del cono* ncl.

E poichè nella rivoluzione del semicerchio generatore *amb*, intorno al diametro *ab*, ciascun punto di detto semicerchio, come *m*, descrive una periferia circolare; perciò rimane anche in questo modo dimostrato, che *la sezione fatta in una sfera, per lo mezzo di un piano qualunque, come* mdp, *è sempre un cerchio.*

Finalmente è visibile, che *la superficie di una sfera è uguale alla superficie laterale del cilindro, che gli è circoscritto* (vedi Fig. 87); imperocchè la base di un tal cilindro essendo un cerchio, il cui diametro è uguale a quello della sfera; e la sua altezza essendo *ab* uguale pur al diametro della sfera; ed essendosi precedentemente dimostrato, che la superficie laterale di un cilindro retto è uguale al prodotto del proprio asse, per la circonferenza della base; dunque è vero che la superficie sferica, e quella laterale del cilindro, alla stessa circoscritto, sono fra loro uguali.

TEOREMA

La superficie sferica è quadrupla del suo cerchio massimo.

Dimostrazione. Chiamasi C la circonferenza del cerchio massimo, e D il diametro; pel teorema precedente, sarà la superficie sferica = D. C.

Or la superficie del cerchio, come si è veduto preceden-

temente, si ottiene dal prodotto della sua periferia per la metà del raggio; e nel nostro caso, essendosi notato con D il diametro sarà $\frac{1}{2}$ D il raggio, e quindi $\frac{1}{4}$ D la metà del raggio; vale a dire, la superficie del cerchio massimo è uguale $\frac{D. C}{4}$. Ma quella della sfera si è trovata essere D. C, ed essendo D. C quadruplo di $\frac{D. C}{4}$, è vero, che la superficie sferica è quadrupla del suo cerchio massimo.



LEZIONE LII.ª

RAPPORTO DELLE SUPERFICIE DE' CORPI.

Definizioni. Si dicono *poliedri simili* quelli, le cui facce sono poligoni simili, del medesimo numero, similmente disposti, e formano, gli uni cogli altri, angoli diedri uguali, non che le dimensioni, o lati omologhi, fra loro proporzionali.

In quanto poi a' corpi rotondi, essi sono simili quando sono generati da figure simili.

E poichè i circoli si considerano tutte figure simili, siegue che *le sfere sono corpi simili.*

TEOREMA.

Le superficie laterali di due prismi, o cilindri, sono fra loro come i prodotti de' perimetri delle rispettive sezioni, fatte perpendicolarmente al proprio asse, pei rispettivi lati, o assi.

Dimostrazione. Chiamando s, s', le superficie laterali di due prismi, o cilindri; p, p', i perimetri delle rispettive sezioni, fatte in essi perpendicolari al proprio asse; ed h, h' gli assi; pel dimostrato nella lezione L.ª sarà $s=p.h$, $s'=p'.h'$, e quindi

$s:s'=p.h:p'.h'$, come si è di sopra detto.

Corollari. Se nella precedente proporzione si suppone $p=p'$, si ha

$s:s'=h:h'$; vale a dire, che *se i perimetri delle sezioni, fatte perpendicolari all'asse, ne' prismi, o ne' cilindri, sono fra loro uguali, le superficie laterali di essi corpi, sono fra loro nella ragione de' rispettivi assi.*

Similmente, se nella cennata proporzione si suppone $h=h'$, si ha

$$s:s'=p:p'.$$

Finalmente, perchè, supponendo $p : p' = h' : h$, si ha che $p.h = p'.h'$, e quindi $s = s'$, per ciò è da ritenersi, *se i perimetri delle sezioni, perpendicolari all'asse di due prismi, o cilindri, sono in ragione inversa de' rispettivi assi, le superficie laterali di tali prismi, o cilindri, sono fra loro uguali.*

TEOREMA

Le superficie de' solidi simili sono fra loro nella duplicata ragione dei lati omologhi.

Dimostrazione. Chiamando, come sopra, p, p' le sezioni fatte perpendicolarmente agli assi, ed h, h', gli assi; non che s, s' le superficie de' solidi, si ha, pel teor. preced.

$s : s' = p.h : p'.h'$; ma è la ragione di $p.h : p'.h'$ = alla composta delle due $p : p'$, e $h : h'$; dunque sarà $s : s' = (p : p')(h : h)$; ma per la simiglianza supposta ne' solidi, si ha $p : p' = h : h'$; dunque la ragione di $s : s'$ essendo composta di due componenti fra loro uguali, si dirà duplicata di una di esse (Lez. XIV.ª), ovvero de' lati omologhi, quali si considerano gli assi.

Corollario. Dunque *le superficie di due sfere sono fra loro in duplicata ragione de' rispettivi raggi, o diametri, ovvero come i loro quadrati.*

TEOREMA

La superficie del cilindro, circoscritto alla sfera, sta a quella della sfera stessa, come 3 : 2.

Dimostrazione. Poichè nella lezione LI.ª, si è trovato, che la superficie sferica è uguale alla laterale del cilindro, che gli è circoscritto: ciò importa che la superficie laterale del cilindro circoscritto vale quattro cerchi massimi della sfera. Quindi, unendo alla superficie laterale del cilindro i due cerchi massimi, che gli sono di base, si avrà la superficie del cilindro uguale 6 cerchi massimi; ovvero

Superficie cilindro: Superficie sferica $= 6 : 4 = 3 : 2$.

TEOREMA

La superficie totale del cono equilatere sta alla superficie della sua base, come 3 : 1.

Dimostrazione. Poichè dal dimostrato nella lez. L.ª risulta, che la superficie laterale di un cono *gdf* (Fig. 92) si ottiene dal prodotto della circonferenza della base per la metà del lato *gd* ovvero, *gf*; e quella della base di esso cono ottenendosi col prodotto della medesima periferia per la metà del raggio *gb*, ovvero per la quarta parte di *gf*; dunque la superficie laterale del cono equilatere è doppia di quella della base; e la totale quindi tripla della medesima, per lo che rimane dimostrato il nostro teorema.

TEOREMA

La superficie di un cono equilatere, circoscritto alla sfera, sta a quella della sfera stessa, come 9 : 4.

Dimostrazione. Dal centro *c* (Fig. 92) della sfera iscritta nel cono *gdf*, si tirano i raggi *cg*, *cd*, *cf*. Or, a causa del triangolo equilatere *gdf*, si ha che gli archi *gd*, *fg*, *fd*, sono fra loro uguali; come uguali fra esse sono pure le corde *gd*, *gf*, *fd*, dal che ne siegue, che ciascuno di detti archi sarà la terza parte della circonferenza, ovvero valerà 120°; Or si ha, che, se dal centro *c* si abbassa la perpendicolare *cba*, questa dividerà la retta *gf* in due parti uguali, quindi sarà arco *ga*, ed *af*, ogn'uno di 60°, e le rispettive corde *ga*, *af*, uguali a' raggi *cg*, *cf*; per la qual cosa i punti *g*, *f* sono ugualmente lontani dagli altri *c*, *a*, e la *gf* taglierà per metà la *ca* nel punto *b*.

Ciò posto, perchè *cb* è metà di *ca*, sarà *cb* anche metà di *cg*; e perchè $\overline{cg}^2 = \overline{cb}^2 + \overline{gb}^2$, perciò, se si suppone il raggio $gc = 1$, sarà $cb = \frac{1}{2}$, e $\overline{cb}^2 = \frac{1}{4}$; ma $\overline{gb}^2 = \overline{cg}^2 - \overline{cb}^2$, dun-

que sostituendo a cg^2, e cb^2 i rispettivi valori numerici trovati, sarà $gb^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Or perchè si è precedentemente dimostrato, che le superficie de'cerchi sono tra loro come i quadrati de'rispettivi raggi, perciò sarà

$$cerchio\ raggio\ cb : cerchio\ raggio\ gb = cb^2 : gb^2 = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1 : 3.$$

Ma il cerchio, che ha per raggio *cb* è cerchio massimo della sfera iscritta, e quello, che ha per raggio *gb* è il cerchio della base del cono circoscritto; dunque, se il cerchio massimo della sfera iscritta è 1, quello della base del cono circoscritto sarà 3: ma si è detto d'innanzi che la superficie della sfera è uguale a quattro cerchi massimi, e nel teorema precedente si è dimostrato, che la superficie totale del cono equilatere è uguale alla tripla superficie della sua base; dunque sarà

Superficie della sfera : *Superficie del cono circoscritto* = 1. 4 : 3. 3 = 4 : 9.

Corollario. Riunendo quanto si è detto negli ultimi teoremi, circa il rapporto del cilindro, e del cono equilatere circostritti alla sfera, colla superficie della sfera stessa, si ha, che le superficie di questi tre corpi sono fra loro rispettivamente come 4 : 6 : 9.



LEZIONE LIII.ª

DE' VOLUMI DE' SOLIDI, E DE' LORO RAPPORTI.

TEOREMA

Il volume di un prisma, o di un cilindro retto, si ottiene moltiplicando la base per l'altezza, (vedi Fig. 86).

Dimostrazione. Poichè il prisma, o cilindro, si è considerato prodotto dal movimento della base, che percorrendo paralellamente a se stessa lungo l'altezza, generava strati di piccolissima spessezza; così è chiaro, che moltiplicando uno di tali strati pel numero delle volte, che essi si trovano ripetuti sull'altezza, si ottiene il volume del prisma, o cilindro. Dunque è vero, che, per ottenersi il volume di un prisma, o cilindro retto, fa d'uopo moltiplicare la sua base per la sua altezza (1).

(1) Nella presente lezione, ed in quelle che sieguono, non si danno, che le proposizioni necessarie alla misura de' volumi, come si è praticato per le aree; ma la maniera di effettuare le moltiplicazioni, prescritte da' diversi enunciati, e formole generali, la quale completa le regole della riquadratura della superficie, e della ricubatura de' corpi, viene a sufficienza indicata nel *Supplemento al trattato elementare di Aritmetica*, messo in fronte alla Geometria di Lacroix. Noi qui noteremo soltanto che la determinazione di tutte queste aree non dipende che da un prodotto di due fattori, i quali si possono sempre riguardare come la base, e l'altezza, vale a dire, come le *due dimensioni* d'un rettangolo equivalente all'area cercata. Quando questi fattori sono espressi in misure decimali, la loro moltiplicazione s'effettua secondo il solito; ma la denominazione dell'unità del resultato richiede alcune attenzioni.

Sia, per esempio, un rettangolo di 49*mi*, 54 di base sopra 15*mi*, 27 d'altezza; moltiplicando questi due numeri, si trova 756, 4758. L'unità di questo numero è il quadrato, che ha un metro di lato, e che per questa ragione chiamasi il *metro quadrato*; le frazioni decimali ne son sempre la decima, la centesima, la millesima, ec. parte: la misura suddivisata potrebbe enunciarsi così: 756 metri quadri, e 4758 diecimillesimi di metro quadro.

L'espressioni de' volumi essendo tutte composte del prodotto d'un'area

Corollario. Posto il precedente teorema, è chiaro, che due prismi, o cilindri, sono fra loro in ragion composta delle basi, e delle altezze rispettive.

Quindi chiamando a, ed a', due cilindri, o prismi; b, e b', le basi, ed h, h', le rispettive altezze, sarà $a : a' = b . h : b' . h'$; se si suppone $h = h'$, si avrà
$a : a' = b : b$; e se è $b = b'$, si avrà
$a : a' = h : h'$; è finalmente se si ha, che

$$b : b' = h' : h, \text{ risulta}$$

$b . h = b' . h'$. Da quanto si è detto ricavasi

1.° I prismi, o i cilindri, di uguali altezze, sono fra loro come le basi.

2.° Quelli di uguali basi sono fra loro come le rispettive altezze.

3.° Quelli, che hanno le basi nella ragion reciproca delle altezze, sono fra loro uguali.

TEOREMA

I volumi di due piramidi triangolari, che hanno uguali basi e la medesima altezza, sono fra loro uguali.

Dimostrazione. Siano le due piramidi *abdc*, *afhg*, (Fig. 95) che hanno uguali basi *bcd*, *fgh*, e la medesima altezza, vale a

moltiplicata per un'altezza, esse dipendono sempre da un prodotto di tre fattori, poichè l'area ne contien due; e questo prodotto riducesi all'espressione d'un parallelepipedo rettangolo equivalente al corpo proposto. Egli è in questo senso che dicesi che un volume qualunque è il prodotto di 3 *dimensioni*. La loro moltiplicazione si fa coi soliti metodi ordinari quando i tre fattori sono espressi in misure decimali; ed il risultato è composto d'un numero intero, e di parti decimali del cubo avente per lato l'unità lineare.

Prendo, per esempio, un parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono 49*mi*, 54, 15*mi*, 27, e 8*mi*, 5; il prodotto 6430,0443 di questi numeri fa vedere che il parallelepipedo proposto contiene 6430 cubi d'un metro di lato, e 443 diecimillesimi di questo cubo.

I decimali quì sopra enunciati non sono riportàti che all'unità principale, la quale è il cubo d'un metro di lato, e che si chiama pure *metro cubo*.

dire, che esse sono comprese fra i due piani paralelli *az*, *bh*. S'intendano dette piramidi tagliate in un numero grandissimo di parti, per de'piani, come *xx*, paralelli alle loro basi; è chiaro, che le porzioni, in cui rimarrà divisa una piramide, saranno di numero uguali a quelle, in cui rimane divisa l'altra. E quindi, se dimostreremo che tali porzioni di spessezza infinitesima, da essere prese come semplici triangoli, sono fra loro uguali, ciascuna a ciascuna, ne risulterà chiaramente la verità del nostro teorema.

Per ciò conseguire, si rifletta, che i due triangoli *bcd*, *mon*, hanno i lati rispettivamente paralelli, e perciò sono simili; come pure simili sono i due triangoli *psi*, *fgh*. Inoltre, nel triangolo *abc*, essendovi la *mo* paralella alla base *bc*, i due triangoli *bac*, *aom*, sono simili e quindi sarà

$$bc : om = ba : am$$

Nel modo stesso, perchè i due triangoli *afg*, *aps*, sono simili, si ha

$$fg : ps = af : ap.$$

Ma, per la simiglianza de'triangoli *baf*, *amp*, si ha

$$ba : am = af : ap;$$

dunque, sostituendo qui le ragioni, poco prima trovate uguali alle due, che compongono la presente proporzione, si avrà

$$bc : om = fg : ps;$$

e passando a'rispettivi quadrati sarà

$$bc^2 : om^2 = fg^2 : ps^2.$$

Intanto, essendo i triangoli simili come i quadrati de'loro

lati omologhi, per ciò sostituendo a ciascuna di queste ragioni uguali, i triangoli che gli corrispondono sarà

bcd : *mno*=*fgh* : *psi*; ed invertendo

bcd : *fgh*=*mon* : *psi*; ma per supposizione è *bcd*=*fgh*, dunque sarà pure *mon*=*psi*.

Potendosi nello stesso modo dimostrare fra loro uguali tutte le porzioni, in cui le dette due piramidi si possono dividere, con de'piani paralelli alle basi; rimane così dimostrato il presente teorema.

Corollari. Se le piramidi, che abbiamo supposte triangolari, saranno di base qualunque, il teorema sarà ugualmente vero; dapoichè, potendosi ciascuna base dividere nello stesso numero di triangoli uguali, ciascuno a ciascuno; se dal vertice della piramide si tirano delle linee rette a'vertici di ciascun triangolo, in cui la base trovasi divisa; è chiaro, che ogni piramide rimarrà divisa in ugual numero di piramidette triangolari, aventi uguali basi, ed altezze, e quindi tutte, pel teorema precedente, uguali fra loro.

Inoltre, considerandosi i coni come piramidi, le cui basi sono poligoni d'infiniti lati, è ad essi applicabile quanto delle piramidi abbiamo detto, ed in conseguenza si ha come dimostrato il principio, che *le piramidi a basi qualunque, o i coni, tanto retti, che obliqui, che hanno la stessa base, ed altezza, sono fra loro in volume uguali.*



LEZIONE LIV.ª

TEOREMA

Il volume di un prisma a basi triangolari, è divisibile in tre piramidi uguali.

Dimostrazione. Sia *abcfgd* (Fig. 90) un prisma triangolare: si tirano le linee rette *bf*, *bd*, *dc*; in questo modo il prisma rimane diviso in tre piramidi, delle quali, una *bdfg* ha la stessa base *dfg* del prisma, non che la stessa sua altezza *gb*; le altre sono *acdb*, *cdfb*. Or le due piramidi, *acdb*, *bdfg*, avendo per basi rispettivamente quelle del dato prisma, e per comune altezza, l'altezza del prisma stesso, esse sono fra loro uguali. Di più è la piramide *acdb*=*cdfb*; dapoichè la diagonale *cd* dividendo il paralellogrammo *acfd* in due parti uguali, dette piramidi hanno, ciascuna, per base la metà di un tal paralellogrammo, e per comune altezza la perpendicolare menata dal punto *b* al piano di esse basi, e per ciò fra loro uguali. Quindi le tre piramidi *bdfg*, *acdb*, *cdfb*, in cui il prisma è stato diviso, essendo fra loro uguali, il teorema rimane dimostrato.

Corollari. Se il prisma sarà a basi qualunque, il teorema avrà luogo ugualmente: da poichè potendosi sempre le due basi di esso dividere in un ugual numero di triangoli, se dai vertici de'rispettivi triangoli si menano delle linee rette da una all'altra base, il prisma rimarrà diviso in un dato numero di prismi triangolari, ciascuno de'quali, pel teorema precedente, sarà triplo della piramide della stessa base, ed altezza; perciò l'intiero prisma sarà triplo della somma delle piramidi triangolari, ciascuna terza parte de'rispettivi prismi; ovvero triplo della piramide, che ha la stessa sua base, ed altezza.

La medesima verità vale pe'cilindri, i quali non sono che prismi a basi poligone di moltissimi lati.

Intanto, essendosi precedentemente detto, che il volume di un prisma è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza; perciò *il volume della piramide*, ch'è terza parte del prisma, *si ottiene col prodotto della propria base per la terza parte dell'altezza.*

Il cono si calcola come la piramide.

Finalmente, potendosi ogni poliedro regolare considerare composto di tante piramidi uguali, quante sono le facce; quali piramidi hanno il vertice comune al centro del poliedro, e per altezza comune il raggio dritto, ovvero la perpendicolare, abbassata del centro medesimo del poliedro su di ciascuna faccia. Ne siegue, che il volume di ciascuna di dette piramidi è uguale alla corrispondente faccia, moltiplicata per la terza parte dell'altezza comune; e quindi la loro somma, ossia il volume del poliedro regolare sarà uguale al prodotto di tutte le facce, per la terza parte dell'altezza, o raggio dritto di esso poliedro.



LEZIONE LV.ª

TEOREMA

Il volume della sfera si ottiene col prodotto della sua superficie per la terza parte del suo raggio.

Dimostrazione. Poichè la sfera può considerarsi come l'aggregato di un infinito numero di piramidette, che hanno i loro vertici al centro della sfera, le basi rispettive fatte da parti picciolissime, prese sulla superficie della sfera medesima, e per altezza il raggio di essa. Perciò si può ritenere, che la sfera pareggia in volume quella piramide, che ha per base la superficie sferica, e per altezza il raggio.

Ma si è nella precedente lezione detto, che il volume della piramide si ottiene col prodotto della superficie della sua base nella terza parte dell'altezza. Dunque il volume della sfera si ottiene moltiplicando la sua superficie per la terza parte del raggio.

Corollari. Siegue dal teorema precedente, che chiamando c il cerchio massimo di una sfera, ed il raggio di essa r, sarà $4.c$ la sua superficie, e $\frac{4}{3}c.r$, il volume. Or si è detto al suo luogo che il volume di un cilindro si ottiene moltiplicando la sua base per la sua altezza; quindi se alla sfera si circoscrive il cilindro, sarà il volume di questo espresso da $2.rc$. Paragonando quindi il volume del cilindro circoscritto a quello della sfera, sarà il primo al secondo, come $2r.c : \frac{4}{3}r.c$, ossia come $2 : \frac{4}{3}$, ovvero come $\frac{6}{3} : \frac{4}{3}$, come $6 : 4$, come $3 : 2$. Vale a dire, che *la sfera è* $\frac{2}{3}$ *del cilindro, che gli è circoscritto.*

Finalmente si ricava dal precedente, che *il volume della sfera è doppio di quello del cono, che ha per base il cerchio massimo, e per altezza il diametro.* Da poichè il volume del cono essendo terza parte di quella del cilindro, della stessa base ed altezza; così il cono che ha per base il cerchio massimo della sfera, e per altezza il diametro, sarà terza parte del cilindro, alla stessa sfera circoscritto. Ma il volume della sfera, stà quello del cilindro circoscritto come 2 : 3, dunque il volume della sfera sta a quello del cono, che ha per base il cerchio massimo, e per altezza il diametro, come 2 : 1, ossia il primo è dopo del secondo.



LEZIONE LVI.ª

TEOREMA

La sfera sta al cono equilatere circoscritto, come 4 : 9.

Dimostrazione. Nella LII.ª Lezione si disse che (Fig. 92) *cerchio del raggio* cb : *cerchio del raggio* gb$=1:3$; ossia il cerchio massimo di una sfera è terza parte della base del cono equilatere, circoscritto alla medesima.

Inoltre nello stesso luogo si ottenne $cb=\frac{cg}{2}=\frac{cd}{2}$,

e quindi la $bc=\frac{bd}{3}$; ossia il raggio della sfera è terza parte

dell'altezza del cono circoscritto. Or si chiami r il raggio cb della sfera, e c la superficie del cerchio massimo; sarà, pel detto di sopra, $3c$ la base del cono, $3r$ la sua altezza, e quin-

di $3c.\ r$ il suo volume. Ma il volume della sfera è $=\frac{4}{3}\,cr$,

dunque sarà

Volume della sfera: volume del cono equilatere circoscrit-

to $=\frac{4}{3}\,cr:3.\ cr$, oppure $=\frac{4}{3}:3=4:9$, come si è detto

di sopra.

Corollari. Riunendo quindi quanto si è dimostrato nel precedente teorema, e nella precedente lezione, risulta, che *se ad una sfera si circoscrive un cilindro, ed un cono equilatere, i rispettivi volumi saranno come* 4 : 6 : 9.

Or d'innanzi si è pur dimostrato, che le superficie di tali solidi sono come 4 : 6 : 9; dunque *i volumi della sfera, del cilindro, e del cono, circoscritti alla medesima, sono fra loro come le superficie rispettive. E la superficie del cilindro circoscritto*

alla sfera, non che il suo volume, è media proporzionale tra la superficie, o volume della sfera stessa, e la superficie, o volume del cono equilatere circoscritto. Infatti le cifre 4, 6, 9, danno la seguente proporzione continua.

$$4 : 6 = 6 : 9.$$

PROBLEMA

Trovare il volume di un cono retto tronco.

Operazione. Sia *bood*, il dato cono tronco retto, (Fig. 79). Si prolunghi l'asse *cs* del tronco finchè incontra in *a* il lato *do* prolungato; si tiri *ox* paralella all'asse del cono. Dico, che l'altezza del cono intiero sarà una quarta proporzionale in ordine alla differenza de' raggi delle due basi, all'asse del cono tronco dato, ed al raggio della base inferiore; e che, conosciuta detta altezza, si calcolerà immediatamente il volume del tronco.

Dimostrazione. Pei triangoli simili *dox, dac* si ha

dx ovvero $dc - cx : ox = dc : ac$; quindi ci è nota l'altezza *ac* dell'intiero cono *abd;* ed in conseguenza ci sarà noto il volume di detto cono intiero, Lezione LIV.ª

Di più essendoci nota, come si è detto, l'altezza *ac*, non che la *cs*, altezza del dato tronco, ci è nota pure l'altezza $as = ac - cs$; dunque ci è pur noto il volume del cono *aoo*. Ciò posto, se dal volume del cono intiero *abd*, si sottrae quello del cono minore *aoo*, la differenza ci darà quello, che appartiene al tronco *bood*.

TEOREMA

Due prismi, o due cilindri, di qualunque base, ed altezze sono fra loro in ragion composta delle basi, e delle altezze.

Dimostrazione. Si chiamino *A, a*, i due prismi, o cilindri, le di cui basi siano *B*, e *b*, e siano *H, h* le altezze rispettive. Per le cose, precedentemente dette, sarà $A = B.\ H$, come

pure $a=b.\,h$, e quindi $A : a=B.\,H : b.\,h=(B : b)\,(H : h)$, come si è di sopra detto.

Corollari. Se nella proporzione $A : a=B.\,H : b.\,h$ si suppone $H=h$. sarà

$A : a=B : b$; Vale a dire, *due prismi, o cilindri che hanno uguali altezze, sono fra loro come le basi.* Se poi $B=b$, *sarà*

$A : a=H : h$, ossia *due prismi, o cilindri, che hanno uguali basi, sono fra loro come le altezze.*

Finalmente se si ha

$B : b=h : H$, sarà

$B.\,H=b.\,h$ e quindi

$A=a$; vale a dire *due prismi, o cilindri, che hanno le loro basi nelle ragione inverse dell'altezze, sono fra loro uguali.*

Finalmente tutto ciò, che si è detto in rapporto a'prismi, e cilindri, è applicabile alle piramidi, ed a'coni, che sono terze parti di detti solidi.



LEZIONE LVII.

Posto quanto si è detto nella precedente lezione, circa il rapporto de' volumi de' prismi, e de' cilindri, è facile il dedurne il seguente

TEOREMA

Se ad un cilindro si circoscrive un cubo, sarà il volume di questo, a quello del cilindro, nella medesima ragione, che il quadruplo del diametro di un cerchio, serba alla sua circonferenza.

Dimostrazione. Sia, come vedesi nella Fig. 91, il cubo *cd* circoscritto al cilindro *cb*. È chiaro che, potendosi ambi questi solidi considerare come prismi, i loro volumi saranno come le rispettive basi, perchè ad essi l'altezza è la medesima. Or la base del cubo non è, che il quadrato del diametro della base del cilindro, e chiamando r il raggio di tale base, il diametro sarà $2r$, e quindi $4r^2$ il quadrato di tale diametro: come pure, chiamando c la circonferenza della base del cilindro, sarà $\frac{2.\,r.\,c.}{4}$ la superficie di tale base; ed in conseguenza sarà

Cubo: cilindro iscritto $= 4r^2 : \frac{2.\,c.\,r}{4}$, e riducendo i termini della seconda ragione allo stesso denominatore, e questo soppresso, perchè comune, si avrà

Cubo : *cilindro iscritto* $= 16.\,r^2 : 2.\,c.\,r$, e dividendo per $2r$ ambi i termini della seconda ragione, sarà

Cubo : *cilindro iscritto* $= 8r : c$. Ma $8r$ è il quadruplo del diametro $2r$, dunque è vero l'enunciato teorema.

TEOREMA

Se alla sfera si circoscrive il cubo, sarà il volume di questo a quello della sfera, come 6 diametri alla circonferenza del cerchio massimo.

Dimostrazione. Sia, come nella Figura 94, circoscritto alla sfera il cubo. Chiamasi c la circonferenza, ed il raggio r del cerchio massimo: il diametro, o'l lato del cubo sarà $2r$; in conseguenza la base del cubo sarà $4r^2$; e questa, moltiplicata per l'altezza $2r$, ci darà il suo volume, espresso da $8r^3$. Inoltre il volume della sfera iscritta essendo uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio, ovvero, uguale a quattro suoi cerchi massimi, moltiplicati pel terzo del raggio; ed ogni cerchio massimo essendo espresso da $\frac{cr}{2}$; sarà la superficie sferica $=\frac{4. c. r}{2}=2. c. r$; quindi sarà il volume della sfera uguale $2. cr. \frac{1}{3} r=\frac{2}{3} c. r^2$; e perciò si avrà

Volume del cubo : *volume della sfera iscritta* $= 8r^3 : \frac{2}{3} cr^2$,

ovvero, dividendo ambi i termini del secondo rapporto per $2r^2$, sarà

Volume del cubo : *volume della sfera iscritta* $= 4r : \frac{c}{3} = 12r : c$.

Ma è $12r=6. 2r$, ovvero sei cerchi massimi; e c non è che la periferia; dunque è vero il teorema.

Corollario. Applicando al precedente teorema il rapporto di 7 : 22, determinato da Archimede, per dinotare la ragione del diametro del cerchio alla periferia, sarà

Volume del cubo : *volume della sfera iscritta.* $= 6. 7 : 22$ ovvero $=42 : 22=21 : 11$.

TEOREMA

Due paralellepipedi simili sono fra loro in triplicata ragione dei lati omologhi; ovvero come i cubi de'lati omologhi.

Dimostrazione. Chiamansi P, p, due paralellipipedi simili; e siano A, B, H, le tre dimensioni del primo, ed a, b, h, le tre dimensioni del secondo, sarà

Volume P : *volume* $p = A.B.H. : a.b.h.$ Or i due paralellepipedi P, p, essendosi supposti simili, per la definizione de'solidi simili, le tre dimensioni di P, sono proporzionali alle tre dimensioni di p: ossia la ragione di $P : p$ è composta di tre ragioni uguali, ovvero è in triplicata ragione di una di esse, cioè, di $A : a$, di $B : b$, o di $H : h$, il che vale essere:

$P : p = (A : a)\ (A : a)\ (A : a)$, o $P : p = (B : b)\ (B : b)\ (B : b)$; $P : p = (H : h)\ (H : h)\ (H : h)$; in conseguenza

$$P : p = A^3 : a^3,$$
$$P : p = B^3 : b^3,$$
$$P : p = H^3 : h^3,$$

giusta l'enunciazione del presente teorema.



LEZIONE LVIII.ª

Quanto si è dimostrato nella precedente lezione, ci conduce a delle verità, che immediatamente ne dipendono, come sono le seguenti

I.° *I prismi triangolari simili sono in triplicata ragione dei lati omologhi.* In fatti i prismi triangolari simili, avendo le basi metà di quelle de'paralellipipedi simili, della medesima altezza de'prismi, così i primi riescono evidentemente metà de'secondi; e quindi, perchè le metà sono nella ragione degl'intieri rispettivi, si ritiene per vero, che

I prismi triangolari simili sono nella ragione de'paralellipipedi che ne sono i doppi, e quindi nella triplicata ragione dei lati omologhi.

E poichè tutt'i prismi simili si possono sempre decomporre in ugual numero di prismi triangolari simili, così il principio suddetto si estende a tutt'i prismi simili.

II.° Ciò, che si è detto de'prismi simili, è applicabile ai cilindri simili i quali, si considerano come prismi simili a basi circolari. Le piramidi, ed i coni simili, come terze parti dei rispettivi prismi, e cilindri simili, sono benanche in triplicata ragione de'lati omologhi.

III.° Inoltre, i poliedri regolari simili, come, per esempio, i tetraedri simili, potendo essere divisi in un stesso numero di piramidi simili, essi pur sono in triplicata ragione de'lati omologhi.

IV.° In fine, le sfere, potendosi considerare come composte di un ugual numero di piramidi simili, aventi i vertici al centro, le basi sulla superficie sferica, e per altezza il raggio; ne siegue che due sfere sono fra loro in triplicate ragione de'lati omologhi, o come i cubi de'rispettivi raggi.



LEZIONE LIX.

La verità IV. assegnata nella precedente lezione, si può, con maggior rigore matematico, dimostrare come nel seguente

TEOREMA.

Le sfere sono fra loro come i cubi de'rispettivi raggi.

Dimostrazione. Siano A, ed a due sfere; R, e C il raggio, e la circonferenza del cerchio massimo della prima, e r, e c il raggio, e la circonferenza del cerchio massimo della seconda sfera.

Per le cose precedentemente dette, sarà

$A=\frac{2RC.\,R}{3}=\frac{2R^2C}{3}$, ed $a=\frac{2rc.\,r}{3}=\frac{2r^2c}{3}$. Quindi si avrà la seguente proporzione.

$A:a=\frac{2R^2\,C}{3}:\frac{2r.^2\,c}{3}$, ovvero $A:a=R^2\,C:r.^2\,c$.

Or, essendosi dimostrato essere le periferie de'cerchi nella ragione de'rispettivi diametri, sarà

$C:c=R:r$, quindi passando agli esponenti

$$\frac{C}{c}=\frac{R}{r}.$$

Intanto, se nella precedente proporzione, cioè

$A:a=R.^2\,C:r.^2\,c$, si prendono gli esponenti delle due ragioni, si ha

$$\frac{A}{a}=\frac{R.^2\,C}{r.^2\,c}=.\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{C}{c}.$$

ma si è trovato $\frac{C}{c}=\frac{R}{r}$, dunque sarà

$$\frac{A}{a}=\frac{R^2.\,R}{r^2\;\,r}=\frac{R^3}{r^3}\text{ ossia}$$

$A:a=R^3:r^3$, come si è di sopra enunciato.

Corollario. Essendosi nel precedente teorema dimostrato, che $A : a = R^3 : r^3$, ed è $R^3 : r^3 = 8R^3 : 8r^3$, sarà perciò $A : a = 8R^3 : 8r^3$. Or $8R^3$, $8r^3$, non sono, che i cubi rispettivamente di $2R$, e $2r$, ovvero de' diametri delle sfere A, ed a; quindi se si suppone, che $R = 1$, e $r = 2$, ovvero, che le due sfere, A ed a, una avesse il raggio doppio, dell'altra, sarà

$A : a = 8 : 8 . 8 = 1 : 8$; vale a dire, che *due sfere delle quali una ha il raggio doppio dell'altra, è la prima ottupla della seconda.*



LEZIONE LX.ª

TEOREMA

Un paralellepipedo, le di cui tre dimensioni sono in proporzione continua, può sempre ridursi ad un cubo equivalente.

Dimostrazione. Sia a il paralellepipedo, che abbia le sue tre dimensioni a, b, h in proporzione continua, cioè, che sia $a : b = b : h$.

Sarà, per tale supposizione

$$b^2 = a.\ h.$$

Or si moltiplichino ambe tali quantità uguali per b, si avrà $b^3 = a.\ b.\ h.$

Ma $a.\ b.\ h$ esprime la solidità di un paralellepipedo, e b^3 quella di un cubo; dunque è vero il suddetto teorema.

PROBLEMA

Formare un cubo doppio di un altro.

Questo problema è incapace di una esatta soluzione aritmetica; da poichè, se a è il lato del cubo che si vuol duplicare, sarà a^3 il cubo dato, e $2a^3$ il cubo doppio cercato. Quindi $\sqrt[3]{2a^3}$, ovvero $a\sqrt[3]{2}$ sarà il lato del cubo doppio di a^3. Or qui si vede, non essere assegnabile esattamente la radice cubica di 2. Solamente, impiegando l'uso de'decimali dessa si potrà ottenere con approssimazione, e questa sarà 1. 2, volendosi arrestare a'decimi; e quindi moltiplicandosi a per 1. 2 si avrà per approssimazione il lato del cubo doppio di a^3.

Similmente riesce impossibile, con i mezzi aritmetici, trovare un cubo triplo, quadruplo, quintuplo, ec. di un cubo dato, giacchè de'numeri 3, 4, 5, non è data con esattezza

la radice cubica. Sarà solamente assegnabile un cubo multiplo di un'altro, quando il numero, che n'esprime la moltiplicità, è un cubo perfetto.

Così potrà sempre farsi un cubo ottuplo di un cubo dato a^3 giacchè $\sqrt[3]{8a^3}=2a$.

In quanto alla duplicazione del cubo, è questo un problema, che riceve la sua soluzione geometrica col mezzo delle linee curve; ma non entra ciò nello scopo delle presenti lezioni (1).

(1) Fin da' tempi d'Ippocrate Chio, quando le matematiche andavano presso gli antichi acquistando sempre più credito, crebbero queste scienze in somma riputazione, per la risposta, fatta da Apollo a quei di Delo; cioè, di duplare il cubo, ch'era appunto la figura dell'altare di quel nume. Si valeva a buoni conti, raddoppiare quel santuario, conservandosene la figura.

Questa proposizione mosse a grande applicazione tutt'i Geometri della Grecia, fra gli altri il suddetto Ippocrate Chio, uomo in queste dottrine di singolar fama. Egli adunque fu il primo a dire, che per raddoppiare il cubo bisognavano due linee proporzionali, delle quali la maggiore fosse il doppio della minore; indi se ne prendessero altre due, le quali fossero medie alle prime, in proporzione continuata, e così agevolmente sarebbesi trovata la soluzione del problema. Ciò però pose in maggior necessità quei grandi Geometri, per lo che nacque profittevole emulazione fra essi, nel dover passare da' principj alle conclusioni.

Ma quel Democrito Abderita, che diede principio alle dottrine degli atomi, ed Eusodio di Gnido, al dir di Vitruvio, tentarono di dare la soluzione di un tal problema col mezzo delle linee curve; come la tentò Archita Tarentino per via de' semicilindri. Questi si fu quel famoso Archita, di cui scrive Aulo Pellio, che fabbricasse una Colomba di legno che volava, concitata da un'aura o aria, che egli dentro vi rinchiudeva.

TALUNE APPLICAZIONI

DELLE PRECEDENTI TEORICHE.

Pria di dare alcune applicazioni de'principî precedentemente dimostrati, notiamo che le misure de'solidi, in pratica, calcolandosi spesso in piedi cubi, pollici cubi, e tese cube convien sapere, che

La tesa cuba vale 216 piedi cubi, giacchè la tesa lineare è di 6 piedi, e'l cubo di 6=216.

Il piede cubo vale 1728 pollici cubi, da poichè il piede lineare =12 pollici, e'l numero 1728 è il cubo di 12.

Il pollice cubo = 1728 linee cube, da poichè il pollice lineare = 12 linee.

PROBLEMA

Misurare una muraglia, di cui la spessezza è di 3 piedi, la lunghezza di 12, e l'altezza di 10.

Operazione. Si moltiplichi la lunghezza 12 per la spessezza 3, il prodotto 36 si moltiplichi per 10, e si otterranno 360, piedi cubi, componenti la muraglia.

Dimostrazione. Essendo la muraglia di forma paralellepipeda, la misura di tali solidi si ottiene col prodotto delle tre dimensioni, come si è detto nella lezione LIII.ª

PROBLEMA

Misurare un'obelisco, ovvero una piramide di pietra, la di cui base è di 12 tese quadrate, e l'altezza di 30 tese.

Operazione. Moltiplichisi la data base pel terzo dell'altezza, il prodotto 120 indica le tese cube, di cui si compone il dato obelisco.

Dimostrazione. Poichè l'obelisco è di forma pirimidale, perciò il volume di un tal solido si ottiene col prodotto della base pel terzo dell'altezza; vedi la lezione LIV.ª

PROBLEMA

Calcolare il volume di una sfera, che abbia il suo diametro di 14 piedi.

Operazione. Fa d'uopo primieramente determinare la periferia del cerchio massimo di detta sfera; ciò si ottiene col mezzo del rapporto generale del diametro alla periferia, fissato da Archimede, vale a dire 7 : 22, come si è detto d'innanzi. Ciò posto, si farà

$$7 : 22 = 14 : x, \text{ e quindi}$$
$$7 . x = 14 . 22, \text{ ed in fine}$$
$$x = \frac{14 . 22}{7} = 44.$$

È dunque la periferia del cerchio massimo della nostra sfera di 44 piedi, e quindi *vol. della sfera* $= 44 . 14 . \frac{7}{3} = 1437 + \frac{1}{3}$ piedi cubici, vedi lez. LV.ª

Dimostrazione. La dimostrazione di quanto si è operato nella soluzione del presente problema, è da per se chiara.

Si sarebbe ottenuto un risultato più esatto, se si fosse adoperato il rapporto di Mezio, in vece di quello di Archimede. *Vedi* la nota alla pag. 67.

PROBLEMA

Abbiasi a calcolare il volume di un corpo *p* di forma irregolarissima, come nella (Fig. 93).

Operazione. Si riponga il dato corpo in un vaso cilindrico, o prismatico, che sia capace di contenerlo pienamente, come *abgf*: si versi in detto vaso dell'acqua, finchè si ottenga il totale covrimento del corpo, e che il livello superiore *cd*, sia perfettamente paralello alla base *gf*. Si segni diligentemente sul vaso il livello *cd*, e quindi si estragga il corpo *p*; si vedrà il livello *cd* dell'acqua, restringersi fino ad *mn*; sarà

la porzione cilindrica, o prismatica, *cmnd*, uguale al volume del dato corpo. Quindi calcolando, con i metodi dati, il volume di una tal porzione di cilindro, si avrà quello del corpo *p*.

Dimostrazione. La dimostrazione del presente problema è chiara come quella del precedente. Solo si avverte, che nella esposta soluzione vi ha luogo un errore, ed è quello, che produce l'acqua, che si attacca naturalmente alle pareti del vaso, o a'pori del corpo, per lo che diminuisce il volume della rimanente porzione di acqua *mfgn*, e quindi la parte *cmnd*, che rappresenta il volume del corpo *p*, è maggiore del vero; ma una tale differenza è sì tenue, da poter essere trascurata.

Le teoriche, precedentemente date pel volume del cilindro, vengono utilmente impiegate nel calcolo del volume de' pozzi: come pure, essendo cilindrica la forma di un gran numero di vasi, che si usano nella misura de' frumenti, o de' liquidi; così le formole stesse sono utilissime per verificare la capacità di queste misure.

La maniera poi di misurare il cono tronco dev'essere ben conosciuta, perchè suol essere anche di frequente uso: i tini, le conche, le caldaja, e molti altri vasi, vi hanno immediata relazione.

Intanto il modo di calcolare tali tronchi, esposto nel corso di queste lezioni non dà una regola pratica, da usarsi nelle circostanze, senza essere obligati a prendere la differenza dei due interi coni, come a suo luogo si è detto. La Croix, nel suo trattato di Agrimensura, dà per la misura de'coni tronchi la seguente formola pratica, ch'è alquanto complicata.

« Fa d' uopo prendere il raggio della base superiore, e « l'altro della base inferiore; calcolare l'aera del quadrato, « costrutto sulla loro somma, e sottrarne il loro prodotto: « indi moltiplicare il residuo pel terzo dell'altezza di questo « tronco, e pel numero 3,14159. »

Eccone un esempio. Suppongasi, che la base inferiore abbia 4 palmi di raggio; la superiore ne abbia 3, e l'altezza sia

di 5 palmi. Si addizionerà 3, e 4, e si avrà 7, il di cui quadrato è 49; se ne toglierà 12, prodotto di 3 per 4, e rimarrà 37, che si moltiplicherà primieramente per 5, e si otterranno 185; e quindi moltiplicato per 3,14 trascurandosi le tre ultime cifre del decimale, a causa della picciolezza del decimetro cubo, si avrà il prodotto 580,90, del quale se ne prenderà il terzo, e'l risultato 193,63, quasi 194, esprimerà i decimetri cubici, che compongono il volume del dato tronco cono.

MISURA DELLE BOTTI.

Le botti possono essere considerate come composte di due coni tronchi, quando non si cerca una grande esattezza in misurarle; veggasi la Figura 96.

Ma se nella misura delle botti si vorrà una precisione maggiore, in tal caso, senza ricorrere ad una formola complicata, si dovrebbe compartire la botte in quattro coni tronchi, come si vede nella figura 97. In tal guisa si terrebbe conto anche della curvatura delle doghe, verso il mezzo delle botti.

Facendo poggiare la botte sopra uno de'suoi fondi, e non essendo intieramente piena, se ne può determinare la parte vôta, immettendo una bacchetta fino alla superficie del liquido, e misurando la circonferenza, o il diametro della botte, che corrisponde all'altezza del liquido; calcolando quindi il volume del cono tronco, che ha per basi il fondo superiore, e la superficie del liquido, si avrà il vacuo della botte. Se la botte sarà piena sino alla metà, in tal caso basterà raddoppiare il volume, che si è ottenuto della parte vacua, per ottenere quello della intiera botte; ma se il liquido non giunga alla metà sarà d'uopo immergere la bacchetta fino al fondo inferiore, e calcolare separatamente il volume de'coni tronchi, che han per basi ciascun fondo della botte, e la superficie del liquido; la somma de'due volumi, separatamente calcolati, darà quello della intiera botte.

Ma a meglio delucidare le idee, date precedentemente,

circa le operazioni per la misura delle botti, detta *staziatura*, qui facciamo notare, che in molti libri, scritti a bella posta sul modo di misurare le botti, si trovano delle formole, appropriate alle particolari incurvature delle doghe, ma non sono esse molto sicure, che per quelle botti, le quali più si avvicinano alla supposta forma.

La formola più comunemente usata prescrive di *calcolare l'area del cerchio, avente per diametro i* $\frac{2}{3}$ *di quello del fondo, più* $\frac{2}{3}$ *dell'altro della pancia, al mezzo della botte, e quindi moltiplicarla per la lunghezza della botte:* ma questa regola offre un risultato più grande della somma de'due coni tronchi, di sopra indicati. Quindi coloro, che amano una precisione maggiore, possono col mezzo de'diversi diametri, ch'eglino hanno misurati, e delle distanze di tali diametri, delineare sulla carta la sezione della botte, come si vede nella Fig. 98; e calcolare pria i tronchi de'coni, distinti dalle linee interne alla curva delle doghe, e poscia gli altri, formati dalle linee esterne; così la somma de'primi darà un totale più piccolo della capacità del vaso; e quella de' secondi un totale più grande, ed il medio, fra'due, sarà con molta approssimazione il più esatto.

Tutto ciò, che veniamo di dire è diretto a quei nostri lettori, i quali, potendo togliere qualche parte del tempo, che essi addicono alle loro occupazioni, rivolgonsi con piacere a questo genere di utili operazioni; che perciò abbiamo creduto avviarli nella conoscenza di quei metodi, ch'eglino debbono adoperare nelle particolari circostanze. Altronde siamo contenti di aver mostrato loro in qual guisa debbono pregiare la esattezza delle pratiche, che all'esercizio delle rispettive professioni si competono.

FINE DELLA GEOMETRIA PIANA, E SOLIDA.



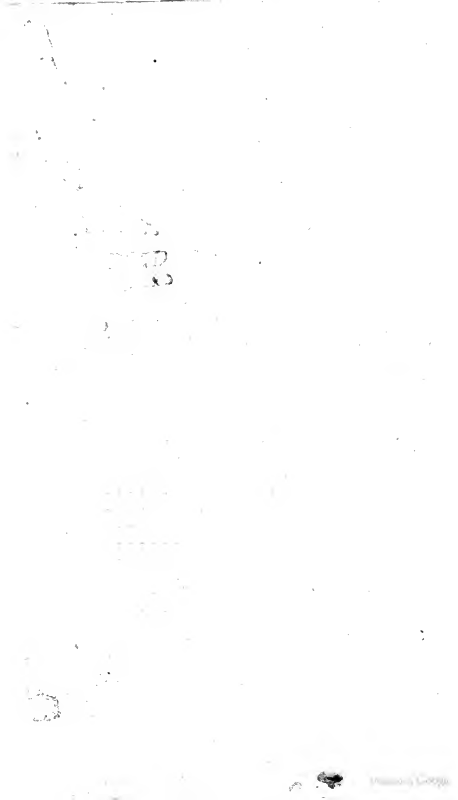
MENDE TIPOGRAFICHE

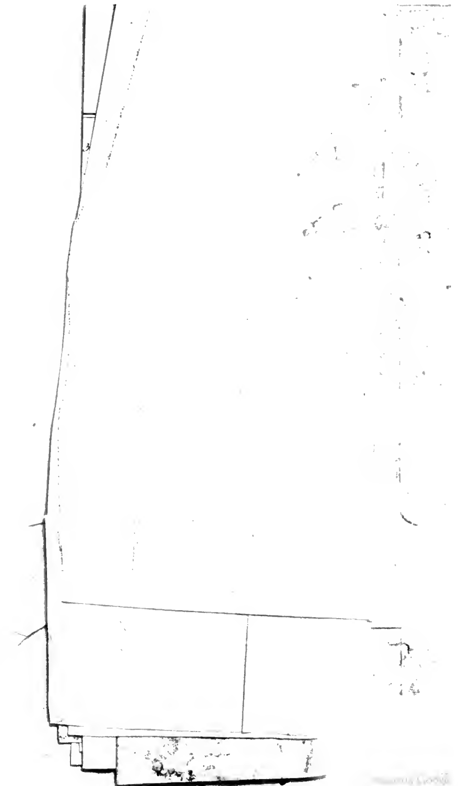
AVVERTITE NEL CORSO DELLA STAMPA DELL'ARITMETICA.

		ERRORI	CORREZIONI
Pag. 16.	Ver:	12° Problema 3°	Problema 2°
« 35.	«	12° è per quel	e per quel
« 44.	«	15° conoscenza	conoscenza
« 51.	«	4° congerà	cangerà
« id.	«	9° 31 per	531 per
« id.	«	10° 31,000	531,000
« id.	«	12° 31000	531000
« id.	«	19° 1775,67	7175,67
« 57.	«	3° in costo	il costo
« 58.	«	4° 1128	1228
« 67.	«	23° bilerar	liberar
« 80.	«	21° enstrarre	estrarre
« 88.	«	25° a 460	a 640

INDICE DELLE MATERIE

CONTENUTE NELL'ARITMETICA, E NELLA GEOMETRIA





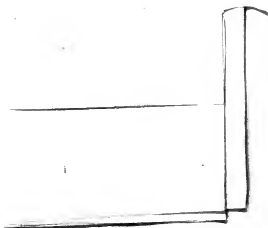


Fig. 6

16.

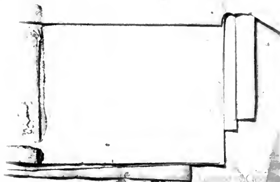




Fig. 86.

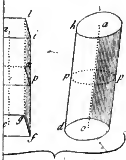


Fig. 91.

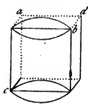
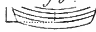


Fig. 96.



b
h
b
d
n
g



